

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ,
А. В. СКОРОХОД, М. И. ЯДРЕНКО

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СБОРНИК
ЗАДАЧ

• ВИЩА ШКОЛА •

А. Я. ДОРОГОВЦЕВ, Д. С. СИЛЬВЕСТРОВ,
А. В. СКОРОХОД, М. И. ЯДРЕНКО

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

СБОРНИК ЗАДАЧ

Под общей редакцией
члена-корреспондента АН УССР
А. В. СКОРОХОДА

*Допущено Министерством высшего и среднего
специального образования УССР
в качестве учебного пособия
для студентов вузов*

Киев
Головное издательство
издательского объединения
«Вища школа»
1980

ББК 22.17я73

517.8

Т34

УДК 519.2(076.1)

Теория вероятностей. Сборник задач: Пер. с укр. /Под общ. ред. чл.-кор. АН УССР А. В. Скорохода.— Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1980.— 432 с.— 20202. 1702060000.

Сборник содержит задачи по основным разделам теории вероятностей и некоторым разделам теории случайных процессов. К задачам даны ответы, к более сложным задачам — указания и решения.

Для студентов университетов, педагогических институтов и технических вузов.

Ил. 17.

Перевод с украинского издания (Головное изд-во изд. объединения «Вища школа», 1976).

Авторский коллектив: проф. А. Я. Дороговцев, проф. Д. С. Сильвестров, чл.-кор. АН УССР А. В. Скороход, проф. М. И. Ядренко.

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией Е. Л. Корженевич

Анатолий Яковлевич Дороговцев, Дмитрий Сергеевич Сильвестров, Анатолий Владимирович Скороход, Михаил Иосифович Ядренко

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Сборник задач

Под. общ. ред. чл.-кор. АН УССР А. В. Скорохода

Редактор Г. Ф. Трофимчук. Художественный редактор Е. В. Чурий. Технический редактор М. С. Чабан. Корректор И. П. Берус.

Информ. бланк № 4232

Сдано в набор 30.08.79. Подп. в печать 13.06.80. Формат 84×108¹/₃₂. Бумага типогр. № 2. Лит. гарн. Выс. печать, 22,68 усл. печ. л. 22,11 уч.-изд. л. Тираж 11000 экз. Изд. № 4836. Зак. 0-286. Цена 90 к.

Головное издательство издательского объединения «Вища школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Книжная фабрика «Коммунист» РПО «Полиграфкинига» Госкомиздата УССР, 310012, Харьков-12, Энгельса, 11.

Т $\frac{20204-057}{M211(04)-80}$ 120.80.1702060000

© Видавниче об'єднання «Вища школа», 1976.

© Перевод на русский язык, издательское объединение «Вища школа», 1980, с изменениями.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

§ 1. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ, АЛГЕБРА
И σ -АЛГЕБРА МНОЖЕСТВ

Будем рассматривать некоторое множество (пространство) $\Omega = \{\omega\}$ и его подмножества, которые обозначают большими буквами латинского алфавита. Запись $A \subset B$ (читается: A подмножество B) означает, что каждый элемент множества A принадлежит множеству B . Множества A и B называются равными ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Запись $\omega \in A$ (читается: ω принадлежит A) означает, что элемент ω принадлежит A ; запись $\omega \notin A$ (читается: ω не принадлежит A) означает, что элемент ω не принадлежит множеству A . Множество, которое не содержит ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом \emptyset ; считается, что пустое множество является подмножеством любого множества.

Сумма (объединение) $A \cup B$ множеств A и B есть множество всех тех и только тех элементов, которые принадлежат по крайней мере одному из множеств A и B .

Произведение (пересечение) $A \cap B$ множеств A и B есть множество тех и только тех элементов, которые принадлежат и A , и B .

Разность $A \setminus B$ множеств A и B есть множество тех и только тех элементов, которые принадлежат A и не принадлежат B .

Дополнение \bar{A} к множеству A есть множество тех и только тех элементов Ω , которые не принадлежат A ($\bar{A} = \Omega \setminus A$).

Симметрическая разность $A \Delta B$ множеств A и B есть множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Множества A и B не пересекаются, если $A \cap B = \emptyset$.

Алгебра множеств. Система \mathfrak{M} подмножеств Ω называется алгеброй, если выполняются такие условия:

- 1) если $A \in \mathfrak{M}$ и $B \in \mathfrak{M}$, то $A \cup B \in \mathfrak{M}$;
- 2) если $A \in \mathfrak{M}$, то и $\bar{A} = \Omega \setminus A \in \mathfrak{M}$.

σ -алгебра множеств. Систему F подмножеств Ω называют σ -алгеброй, если выполняются такие условия:

- 1) если $A_n \in F$ ($n = 1, 2, \dots$), то и $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$;
- 2) если $A \in F$, то и $\bar{A} \in F$.

I. 1.1. Доказать равенства: а) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B$; б) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$; в) $(A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$.

I.1.2. Пусть A и B — подмножества плоскости $\Omega = \mathbb{R}^2$, определены следующим образом:

$$A = \{(x, y) : x + y \leq 1\}, \\ B = \{(x, y) : y \leq 2x + 2\}.$$

Изобразить множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, \bar{A} , \bar{B} , $\bar{A} \cap \bar{B}$.

I.1.3. Пусть $A_n = \left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right)$. Описать множества

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

I.1.4. Пусть $A_n (n = 1, 2, \dots)$ — последовательность подмножеств плоскости, определенных следующим образом: $A_n = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}\right\}$. Описать множества

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \quad B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

I.1.5. Доказать, что: а) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$; б) $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$; в) $A \triangle \emptyset = A$, $A \triangle \Omega = \bar{A}$; г) $A \triangle A = \emptyset$, $A \triangle \bar{A} = \Omega$.

I.1.6. Пусть A_n — последовательность множеств. Доказать, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, где $B_1 = A_1$, $B_n = A_n \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} A_i$ и множества B_i попарно не пересекаются.

I.1.7. Пусть I — некоторое множество индексов. Дока-

$$\text{зать, что } \overline{\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha}} = \bigcap_{\alpha \in I} \bar{A}_{\alpha}; \quad \overline{\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha}} = \bigcup_{\alpha \in I} \bar{A}_{\alpha}.$$

I.1.8. Пусть $\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$ (функцию $\chi_A(\omega)$ будем называть индикатором множества A).

Доказать, что:

а) $\chi_{A \cap B}(\omega) = \chi_A(\omega) \chi_B(\omega);$

б) $\chi_{A \cup B}(\omega) = \chi_A(\omega) + \chi_B(\omega) - \chi_A(\omega) \chi_B(\omega);$

в) $\chi_{\bar{A}}(\omega) = 1 - \chi_A(\omega);$

$$\text{г) } \chi_{A \setminus B}(\omega) = \chi_A(\omega) [1 - \chi_B(\omega)];$$

$$\text{д) } \chi_{A \Delta B}(\omega) = |\chi_A(\omega) - \chi_B(\omega)|;$$

$$\text{е) } \chi_{A \Delta B}(\omega) = \chi_A(\omega) + \chi_B(\omega) \pmod{2}.$$

1.1.9. Используя результаты задачи 8, доказать равенства:

$$\text{а) } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C);$$

$$\text{б) } (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C);$$

$$\text{в) } \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}.$$

1.1.10. Пусть $\{A_n\}$ — некоторая последовательность подмножеств Ω ; A^* — множество тех и только тех элементов ω , которые принадлежат бесконечному числу множеств A_n ; A_* — множество тех и только тех элементов ω , которые принадлежат всем множествам A_n , за исключением конечного числа.

Доказать, что:

$$\text{а) } A_* \subset A^*; \text{ б) } A_* = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m, \text{ в) } A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m.$$

Замечание. Иногда для множеств A^* и A_* используют такие обозначения:

$A^* = \overline{\lim} A_n$, $A_* = \underline{\lim} A_n$. Если $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n$, то говорят, что существует $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n$.

1.1.11. Пусть

$$A_n = \begin{cases} A & \text{при четном } n, \\ B & \text{при нечетном } n. \end{cases}$$

Доказать, что

$$\overline{\lim} A_n = A \cup B; \quad \underline{\lim} A_n = A \cap B.$$

1.1.12. Пусть $A_n (n = 1, 2, \dots)$ — последовательность подмножеств Ω такая, что для всех n $A_n \supset A_{n+1}$. Доказать, что $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.

1.1.13. Пусть $A_n (n = 1, 2, \dots)$ — последовательность подмножеств Ω такая, что для всех n $A_n \subset A_{n+1}$. Доказать, что $\overline{\lim} A_n = \underline{\lim} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

1.1.14. Пусть A_n — последовательность попарно непересекающихся множеств. Доказать, что $\underline{\lim} A_n = \overline{\lim} A_n = \emptyset$.

1.1.15. Пусть \mathfrak{M} — алгебра множеств. Доказать:

- а) если $A_k \in \mathfrak{M}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{M}$;
 б) если $A_k \in \mathfrak{M}$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то $\bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathfrak{M}$;
 в) $\Omega \in \mathfrak{M}$, $\emptyset \in \mathfrak{M}$.

1.1.16. Пусть $I = \{\alpha\}$ — некоторое множество индексов, \mathfrak{M}_α — система алгебр, перенумерованных индексом α ($\alpha \in I$). Доказать, что $\bigcap_{\alpha \in I} \mathfrak{M}_\alpha$ есть алгебра. (Пересечение любого числа алгебр есть алгебра).

1.1.17. Доказать, что множество всех подмножеств Ω есть алгебра.

1.1.18. Пусть K — некоторый класс подмножеств Ω . Алгебра $\mathfrak{M}_0(K)$ называется минимальной алгеброй, которая содержит класс K , если: 1) каждое множество из K принадлежит $\mathfrak{M}_0(K)$; 2) какая бы ни была алгебра \mathfrak{M} , которая содержит класс K , $\mathfrak{M}_0(K) \subset \mathfrak{M}$.

Доказать, что для каждого класса K существует минимальная алгебра, которая содержит класс K .

1.1.19. Пусть класс K состоит из одного множества $A \subset \Omega$. Указать минимальную алгебру $\mathfrak{M}_0(K)$, которая содержит класс K .

1.1.20. Пусть $\Omega = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Описать все алгебры множеств, которые содержат множества $A = \{2, 3, 4\}$ и $B = \{4, 6\}$. Указать минимальную алгебру, которая содержит множества A и B .

1.1.21. Систему множеств A_1, \dots, A_n называют разбиением Ω , если: 1) A_1, \dots, A_n попарно не пересекаются, 2) $\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$.

Доказать, что совокупность всех возможных объединений множеств A_1, \dots, A_n образует алгебру. Описать минимальную алгебру $\mathfrak{M}_0(K)$, которая содержит класс $K = \{A_1, \dots, A_n\}$.

1.1.22. Непустое множество A называют атомом алгебры \mathfrak{M} , если 1) $A \in \mathfrak{M}$; 2) если $B \in \mathfrak{M}$, $B \not\subset \emptyset$ и $B \subset A$, то $B = A$.

Если \mathfrak{M} — конечная алгебра, то множество всех атомов \mathfrak{M} образует разбиение Ω A_1, \dots, A_n . Минимальная алгебра, которая содержит множества A_1, \dots, A_n , совпадает с \mathfrak{M} . Доказать это.

1.1.23. Пусть K — произвольный класс подмножеств Ω . Образует последовательно: 1) класс K_1 , который состоит из \emptyset , Ω и множеств A таких, что или $A \in K$, или $\bar{A} \in K$; 2) класс K_2 всех возможных конечных пересечений подмножеств из класса K_1 ; 3) класс K_3 всех возможных конечных сумм непересекающихся множеств из класса K_2 . Доказать, что класс K_3 совпадает с минимальной алгеброй $\mathfrak{M}_0(K)$, которая содержит класс K . Построить классы K_1, K_2, K_3 , если $K = \{\{1, 2, 3\}, \{3, 4\}\}$.

1.1.24. Если F — σ -алгебра множеств и $A_n \in F$ ($n = 1, 2, \dots$), то $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in F$. Доказать это.

1.1.25. Доказать, что пересечение любого числа σ -алгебр есть σ -алгебра.

1.1.26. Пусть K — некоторый класс подмножеств Ω .

Наименьшей σ -алгеброй, содержащей класс K (σ -алгеброй, порожденной классом K), называется σ -алгебра $F_0(K)$ такая, что:

- 1) *каждое множество из класса K принадлежит $F_0(K)$;*
- 2) *какая бы ни была σ -алгебра F , содержащая класс K , $F_0(K) \subset F$.*

Доказать, что для каждого класса K существует наименьшая σ -алгебра $F_0(K)$, содержащая класс K .

1.1.27. Пусть K_1 и K_2 — две системы подмножеств Ω , причем $K_1 \subset K_2$. Доказать, что $F_0(K_1) \subset F_0(K_2)$.

1.1.28. Пусть K — класс интервалов вида $[a, b)$ на числовой прямой.

Наименьшая σ -алгебра $\mathfrak{B} = F_0(K)$, содержащая класс K , называется σ -алгеброй \mathfrak{B} борелевских множеств; множества из \mathfrak{B} называются борелевскими множествами.

Доказать, что: а) для каждого a множество $\{a\}$ — борелевское; б) каждое счетное множество на числовой прямой — борелевское; в) интервал (a, b) — борелевское множество; г) открытое множество на числовой прямой — борелевское; д) замкнутое множество на числовой прямой — борелевское.

1.1.29. Пусть K — класс открытых интервалов (a, b) на числовой прямой. Доказать, что наименьшая σ -алгебра, содержащая класс K , есть σ -алгебра \mathfrak{B} борелевских множеств.

1.1.30. Пусть K — класс открытых множеств на числовой прямой. Доказать, что наименьшая σ -алгебра, содержащая класс K , есть σ -алгебра \mathfrak{B} борелевских множеств.

1.1.31. Пусть K — класс замкнутых множеств на числовой прямой. Доказать, что наименьшая σ -алгебра, содержащая класс K , есть σ -алгебра борелевских множеств.

1.1.32. Пусть R — числовая прямая. Доказать, что совокупность множеств вида $F \cap G$, где F и $G \subset R$, F — замкнутое, а G — открытое множество, образует алгебру, но не образует σ -алгебру. Какие множества нужно добавить к этой совокупности, чтобы получить σ -алгебру?

1.1.33. Класс M подмножеств Ω называется *монотонным классом*, если

$$\lim A_n \subset M.$$

для любой монотонной последовательности множеств A_n из M .

Для того чтобы алгебра \mathfrak{M} была σ -алгеброй, необходимо и достаточно, чтобы она была монотонным классом. Доказать это.

1.1.34. Доказать, что пересечение любого числа монотонных классов есть монотонный класс.

1.1.35. Пусть K — некоторый класс подмножеств Ω . Монотонный класс $M_0(K)$ называется *наименьшим монотонным классом, содержащим класс K* , если выполнены следующие условия:

- 1) каждое множество из K принадлежит $M_0(K)$;
- 2) какой бы ни был монотонный класс M , содержащий K ,

$$M_0(K) \subset M.$$

Доказать, что для любого класса K существует наименьший монотонный класс $M_0(K)$, содержащий класс K .

1.1.36. Пусть K — класс множеств. $F_0(K)$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая K , $M_0(K)$ — наименьший монотонный класс, содержащий K . Доказать, что

$$M_0(K) \subset F_0(K).$$

1.1.37. Пусть \mathfrak{M} — алгебра множеств, $F_0(\mathfrak{M})$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая \mathfrak{M} , $M_0(\mathfrak{M}) = M$ — наименьший монотонный класс, содержащий \mathfrak{M} .

Доказать также утверждения:

а) класс множеств $\tilde{M} = \{B : B \in M \text{ и } \bar{B} \in M\}$ совпадает с M ;

б) пусть $A \in M$, тогда класс множеств $M_A = \{B : B \in M, A \cap B \in M\}$ совпадает с M ;

в) M есть σ -алгебра множеств;

г) $F_0(\mathfrak{M}) = M_0(\mathfrak{M})$, то есть наименьшая σ -алгебра, содержащая алгебру \mathfrak{M} , совпадает с наименьшим монотонным классом, содержащим \mathfrak{M} .

§ 2. КОМБИНАТОРИКА

Основной принцип комбинаторики (правило умножения). Пусть необходимо последовательно выполнить k действий. Если первое действие можно выполнить n_1 способами, после чего второе — n_2 способами, потом третье — n_3 способами и т. д. до k -го действия, которое можно выполнить n_k способами, то все k действий вместе могут быть выполнены $n_1 n_2 n_3 \dots n_k$ способами.

Комбинации (сочетания) из n элементов по k . Пусть множество A содержит n элементов. Тогда число подмножеств множества A , содержащих k элементов, равно

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

Комбинация из n элементов $\{a_1, \dots, a_n\}$ по k называется k -элементное подмножество множества $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Упорядоченные множества. Множество из n элементов называется упорядоченным, если каждому элементу этого множества сопоставлено некоторое число (номер элемента) от 1 до n так, что разным элементам соответствуют разные числа. Упорядоченные множества считаются различными, если они отличаются либо своими элементами, либо их порядком.

Перестановки данного множества. Различные упорядоченные множества, которые отличаются только порядком элементов (то есть могут быть образованы из одного и того же множества), называются перестановками этого множества. Число перестановок множества из n элементов равно $P_n = n!$

Размещения из n по k . Упорядоченные k -элементные подмножества множества, содержащего n элементов, называются размещениями из n по k . Число размещений из n по k равно

$$A_n^k = k! C_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1).$$

Число способов разбиения множества из n элементов на m групп. Пусть k_1, k_2, \dots, k_m — целые неотрицательные числа, причем $k_1 +$

$+k_2 + \dots + k_m = n$. Число способов, с помощью которых можно представить множество A из n элементов в виде объединения множеств B_1, \dots, B_m , содержащих соответственно k_1, \dots, k_m элементов, равно

$$C_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}.$$

Перестановки с повторениями. Число различных перестановок, которые можно получить из n элементов, среди которых k_1 элементов первого типа, k_2 элементов второго типа, \dots , k_m элементов m -го типа, равно

$$C_n(k_1, \dots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_m!}.$$

Прямое (декартово) произведение множеств. Пусть заданы множества A_1, A_2, \dots, A_k . Множество всех наборов вида (a_1, a_2, \dots, a_k) , где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_k \in A_k$ называется **прямым произведением множеств** A_1, A_2, \dots, A_k и обозначается $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k$.

Пример. Если $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d, e\}$, то

$$A \times B = \{(a, c), (a, d), (a, e), (b, c), (b, d), (b, e)\}.$$

Число элементов прямого произведения множеств.

Пусть $N(A)$ — число элементов множества A . Тогда $N(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k) = N(A_1)N(A_2)\dots N(A_k)$.

1.2.1. Из города A в город B ведет n дорог, из города B в город C — m дорог. Сколькими способами можно совершить путешествие по маршруту $A-B-C$?

1.2.2. На вершину горы ведет 7 дорог. Сколькими способами турист может взобраться на гору и спуститься с нее? Дать ответ на тот же вопрос, если подъем и спуск происходит разными путями.

1.2.3. В розыгрыше первенства страны по футболу принимают участие 17 команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали?

1.2.4. Сколько трехзначных чисел можно написать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4?

1.2.5. Сколько трехзначных чисел можно написать с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, если каждую из цифр использовать не больше одного раза?

1.2.6. Сколькими способами 7 лиц могут разместиться в очереди к кассе?

1.2.7. В классе изучают 10 предметов. В понедельник 6 уроков, причем все уроки разные. Сколькими способами можно составить расписание на понедельник?

1.2.8. Сколько есть пятизначных чисел, которые делятся на 5?

1.2.9. На одной из боковых сторон треугольника взято n точек, на другой — m точек. Каждая вершина при основании треугольника соединена прямыми с точками, взятыми на противоположной боковой стороне. На сколько частей разделится треугольник проведенными прямыми?

1.2.10. В турнире принимает участие n шахматистов. Сколько партий будет сыграно в шахматном турнире, если каждые 2 участника встретятся один раз?

1.2.11. Сколько диагоналей можно провести в выпуклом n -угольнике?

1.2.12. На плоскости проведено n прямых линий, причем никакие 2 из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения образуется при этом?

1.2.13. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость n прямых?

1.2.14. На какое наибольшее число частей могут разделить пространство n плоскостей?

1.2.15. На какое наибольшее число частей могут разделить плоскость n окружностей?

1.2.16. На какое наибольшее число частей могут разделить пространство n сфер?

1.2.17. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске размерами $n \times n$ две разноцветные ладьи так, чтобы они не били друг друга?

1.2.18. Автомобильный номер состоит из двух букв и четырех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 32 буквы русского алфавита?

1.2.19. Если повернуть лист бумаги на 180° , то цифры 0, 1, 8 не изменяются, 6 и 9 переходят друг в друга, а другие цифры теряют смысл. Сколько существует семизначных чисел, величина которых не изменится при повороте листа бумаги на 180° ?

1.2.20. В розыгрыше первенства страны по футболу в высшей лиге класса А участвует 16 команд. Команды, которые занимают первое, второе и третье места, награждаются соответственно золотой, серебряной и бронзовой медалями, а команды, которые окажутся на последних двух местах, покинут высшую лигу. Сколько различных результатов первенства может быть?

$$\text{б) } (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n;$$

$$\text{в) } C_n^m C_k^0 + C_{n-1}^{m-1} C_{k+1}^1 + \dots + C_{n-m}^0 C_{k+m}^m = C_{n+k+1}^m;$$

$$\text{г) } C_{n-1}^r + C_{n-2}^{r-1} + \dots + C_{r-1}^1 = C_n^r.$$

1.2.29. Найти число кратчайших путей из точки A в точку B на шахматной доске, изображенной на рис. 2.

1.2.30. Международная комиссия состоит из 9 лиц. Материалы комиссии хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф, сколько ключей к ним нужно изготовить и как распределить среди членов комиссии, чтобы доступ к сейфу был возможен только тогда, когда соберется не меньше 6 членов комиссии? Рассмотреть задачу для случая, когда комиссия состоит из n лиц, а сейф можно открыть лишь при наличии не менее m членов комиссии.

1.2.31. В выпуклом n -угольнике проведены все диагонали. Известно, что никакие три из них не пересекаются в одной точке. На сколько частей разделится при этом многоугольник?

1.2.32. Доказать, что $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$.

1.2.33. а) Доказать, что $C_n^{k+1} > C_n^k$ при $k < \frac{n-1}{2}$, а $C_n^{k+1} < C_n^k$ при $k > \frac{n-1}{2}$.

б) Указать наибольшее число среди чисел C_n^k , где $k = 0, 1, \dots, n$.

1.2.34. Доказать, что числа $C_p^1, C_p^2, \dots, C_p^{p-1}$ делятся на p , если p — простое число.

1.2.35. Доказать, что разность $a^p - a$ при любом целом a делится на p , если p — простое число (малая теорема Ферма).

1.2.36. Доказать, что разность $[(2 + \sqrt{5})^p] - 2^{p+1}$ делится на p , если p — простое число ($p > 2$). (Символ $[x]$ означает целую часть x).

1.2.37. Сколько подмножеств имеет множество, содержащее n элементов? (Считать, что пустое множество есть подмножество каждого множества).

1.2.38. В комнате n лампочек. Сколько всего есть различных способов освещения комнаты?

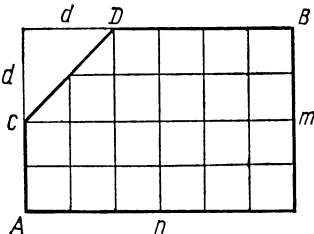


Рис. 2

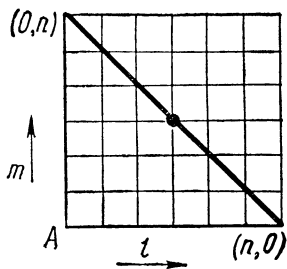


Рис. 3

1.2.39. Имеется сеть дорог (рис. 3). Из точки A выходит 2^n туристов, причем половина идет в направлении l , а половина — в направлении m . Дойдя до первого перекрестка, каждая группа делится на две: половина идет в направлении l , половина — в направлении m . Такое деление происходит на каждом перекрестке. Где будут находиться все эти туристы после того, как пройдут n отрезков,

и сколько туристов окажется на каждом перекрестке?

1.2.40. На плоскости дано n точек, причем m точек лежит на одной прямой и кроме них никакие три точки не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников, вершинами которых есть данные точки?

1.2.41. Сколькими способами можно разместить на полке 4 книги (обозначим их A, B, C, D)?

1.2.42. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \dots, 2n\}$ так, чтобы каждое четное число имело четный номер?

1.2.43. Сколько есть перестановок из n элементов, в которых данные 2 элемента не стоят рядом?

1.2.44. Сколькими способами можно разместить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы они не могли бить одна другую?

1.2.45. Сколькими способами можно рассадить четырех учеников на 25 местах?

1.2.46. Студенту нужно в течение восьми дней сдать 4 экзамена. Сколькими способами это можно сделать?

1.2.47. Сколькими способами можно упорядочить множество $1, 2, \dots, n$ так, чтобы числа $1, 2, 3$ стояли рядом и в порядке возрастания?

1.2.48. Сколько существует целых положительных чисел, не превосходящих 10^9 , цифры которых разные и размещены в возрастающем порядке?

1.2.49. Сколько существует перестановок из n элементов, у которых между двумя данными элементами стоит r элементов?

1.2.50. На собрании должно выступить 4 лица: A, B, C, D . Сколькими способами их можно записать в список ораторов, если B не может выступить раньше, чем A ?

1.2.51. Сколькими способами можно разместить n гостей за круглым столом?

1.2.52. Сколькими способами можно упорядочить множество $\{1, 2, \dots, n\}$ так, чтобы каждое число, кратное 2, и каждое число, кратное 3, имело номер, кратный 2 и 3?

1.2.53. Сколько различных слов можно образовать перестановкой букв в слове «математика»?

1.2.54. Пусть имеем n букв: k_1 — букв a_1 , k_2 — букв a_2 , ..., k_m — букв a_m ($k_1 + \dots + k_m = n$). Сколько различных слов можно образовать из этих букв?

1.2.55. Сколько слов из пяти букв можно образовать из букв a, b, c , если известно, что буква a встречается в слове не более двух раз, b — не более одного раза, c — не более трех раз?

1.2.56. Сколько различных слов можно образовать перестановкой букв в слове «комбинаторика»?

1.2.57. Сколькими способами можно разделить $m + n + s$ предметов на три группы так, чтобы в одной группе было m предметов, в другой — n , в третьей — s предметов?

1.2.58. Сколькими способами можно разделить $3n$ разных предметов между тремя лицами так, чтобы каждое лицо получило n предметов?

1.2.59. Доказать, что выражение $(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n$ равно сумме всех возможных слагаемых вида

$$\frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k},$$

где $r_1 + r_2 + \dots + r_k = n$, т. е.

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_k)^n = \sum_{\substack{r_1 > 0, \dots, r_k > 0 \\ r_1 + \dots + r_k = n}} \frac{n!}{r_1! r_2! \dots r_k!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \dots a_k^{r_k}$$

(полиномиальная теорема).

1.2.60. n одинаковых шаров помещают в N урнах. Доказать, что:

а) число различных способов расположения равно

$$C_{N+n-1}^n = C_{N+n-1}^{N-1};$$

б) число расположений, при которых в каждой урне есть по крайней мере один шар, равно C_{n-1}^{N-1} .

1.2.61. а) Сколько целых неотрицательных решений имеет уравнение $x_1 + \dots + x_N = n$?

б) Сколько целых положительных решений имеет уравнение $x_1 + \dots + x_N = n$?

1.2.62. Пусть имеется аналитическая функция N переменных $f(x_1, \dots, x_N)$. Сколько различных частных производных порядка n имеет эта функция?

1.2.63. Сколькими способами можно распределить n одинаковых подарков среди N детей? Сколько среди них таких способов, когда каждый ребенок получает по крайней мере один подарок?

1.2.64. Комбинации из m предметов по n с повторениями — это группы по n предметов, взятых из данных m предметов, причем, каждый предмет может повторяться произвольное число раз (порядок предметов в группе не является существенным). Написать все комбинации из трех элементов по два с повторениями. Доказать, что число комбинаций с повторениями из m элементов по n равно

$$f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1}.$$

1.2.65. Сколькими способами можно выбрать 6 одинаковых или разных пирожных в кондитерской, где есть 11 различных сортов пирожных?

1.2.66. Сколько костей домино можно образовать, используя числа $0, 1, \dots, r$?

1.2.67. Сколько целых неотрицательных решений имеет неравенство $x_1 + \dots + x_m \leq n$?

1.2.68. Сколько целых неотрицательных решений имеет система неравенств:

$$\begin{aligned}x_1 &\leq r + 1; \\x_1 + x_2 &\leq r + 2; \\x_1 + \dots + x_n &\leq r + n,\end{aligned}$$

где n — целое неотрицательное число?

1.2.69. Пусть есть множество $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ из n элементов, которое назовем генеральной совокупностью, и пусть последовательно из множества A выбирают r элементов $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r}$. Систему $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r})$ называют выборкой длины r из генеральной совокупности A . Рассмотрим два способа выбора: выбор с возвращением (всякий раз выбранный элемент возвращается во множество A) и выбор без возвращения (всякий раз выбранный элемент не возвращается в A).

Доказать, что число различных выборок длины n из генеральной совокупности, содержащей n элементов, равно n^r , если осуществляется выбор с возвращением, и равно $A_n^r = n(n-1) \dots (n-r+1)$, если осуществляется выбор без возвращения.

1.2.70. Пусть множество X содержит k элементов, а множество Y — n элементов. Сколько существует различных функций, областью определения которых является X , а областью значений — Y ?

1.2.71. Пусть $N(A)$ — число элементов множества A . Доказать, что:

$$а) N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B);$$

$$б) N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - [N(A \cap B) + N(A \cap C) + N(B \cap C)] - N(A \cap B \cap C);$$

$$в) N(A_1 \cup \dots \cup A_n) = N(A_1) + \dots + N(A_n) - [N(A_1 \cap A_2) + N(A_1 \cap A_3) + \dots + N(A_{n-1} \cap A_n)] + [N(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + N(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \dots + N(A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n)] - \dots + (-1)^{n-1} N(A_1 \cap \dots \cap A_n).$$

Правая часть этого равенства есть сумма n слагаемых, причем k -е слагаемое имеет вид

$$(-1)^{k-1} S_k(A_1, \dots, A_n),$$

где $S_k(A_1, \dots, A_n)$ есть сумма чисел $N(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})$ по всем возможным пересечениям k различных множеств из множеств A_1, \dots, A_n .

1.2.72. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — физический, а 10 учеников не посещают ни одного кружка. Сколько учащихся посещают математический и физический кружки? Сколько учащихся посещают только математический кружок?

1.2.73. Из 100 студентов английский язык знают 28 студентов, немецкий — 30, французский — 42, английский и немецкий — 8, английский и французский — 10, немецкий и французский — 5, все 3 языка знают 3 студента. Сколько студентов не знают ни одного из трех языков?

1.2.74. В жестоком бою не менее 70% бойцов потеряли один глаз, не менее 75% — одно ухо, не менее 80% одну руку и не менее 85% — одну ногу. Каково минимальное количество бойцов, которые потеряли одновременно глаз, ухо, руку и ногу? (Льюис Керрол. История с узелками. М., Мир, 1973).

1.2.75. Рассматриваются все перестановки n чисел $1, 2, \dots, n$. Найти число тех перестановок, в которых по крайней мере одно число стоит на своем месте.

1.2.76. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — взаимно простые натуральные числа, а N — некоторое натуральное число. Найти количество положительных натуральных чисел, которые не превосходят N и не делятся ни на одно из чисел a_1, a_2, \dots, a_n .

1.2.77. Пусть n — натуральное число, разложение которого на простые множители имеет вид

$$n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k} \quad (p_1, \dots, p_k \text{ — простые числа}),$$

а $\varphi(n)$ — число положительных натуральных взаимно простых с n чисел, которые не превышают n .

Доказать, что

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

(функция $\varphi(n)$ называется функцией Эйлера).

1.2.78. Сколько членов в разложении определителя n -го порядка содержит один или более диагональных элементов?

1.2.79. Пусть $N_{[m]}(A_1 \cup \dots \cup A_m)$ — число элементов, которые входят ровно в m множеств из A_1, A_2, \dots, A_n .

Доказать, что

$$\begin{aligned} N_{[m]}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &= C_m^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m < n} N(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_m}) - \\ &- C_{m+1}^m \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{m+1} < n} N(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{m+1}}) + \dots + (-1)^{n-m} \times \\ &\times C_n^m \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_n < n} N(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_n}). \end{aligned}$$

1.2.80. Найти число всех перестановок чисел $1, 2, \dots, n$, в которых ровно m чисел стоят на своих местах.

1.2.81. Пусть A — множество из n элементов, A_1, A_2, \dots, A_k — подмножества A такие, что ни одно из подмножеств не является частью другого. Доказать, что

$$k \leq C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} \quad (\text{теорема Шпернера}).$$

1.2.82. Пусть A — множество из n элементов, A_1, \dots, A_k — подмножества A такие, что ни одно из подмножеств не является частью другого, а i_1, \dots, i_k — количество элементов

подмножеств A_1, \dots, A_k соответственно. Доказать, что

$$\sum_{r=1}^k \frac{1}{C_n^r} \leq 1.$$

1.2.83. Пусть x_1, \dots, x_n — вещественные числа, $|x_i| \geq 1$. Тогда в любом интервале длины 2 есть не более $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ сумм вида $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k$, где $\varepsilon_k = \pm 1$. Доказать это.

1.2.84. Пусть A_1, \dots, A_s — подмножества множества из n элементов такие, что нет множеств A_i и A_j , для которых $A_i \supset A_j$ и $A_i \setminus A_j$ содержит больше, чем $(r-1)$ элемент. Тогда s не превосходит суммы r максимальных по величине биномиальных коэффициентов C_n^k . Доказать это.

1.2.85. Пусть r — произвольное целое число, x_1, \dots, x_n — действительные числа, $|x_i| \geq 1$ ($i = \overline{1, n}$). Доказать, что для любого интервала длины $2r$ число сумм вида $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k$, где $\varepsilon_k = \pm 1$, лежащих в этом интервале, не превышает суммы r наибольших биномиальных коэффициентов C_n^k .

§ 3. СТОХАСТИЧЕСКИЙ ЭКСПЕРИМЕНТ. ПРОСТРАНСТВО ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СОБЫТИЙ

В теории вероятностей рассматриваются стохастические эксперименты, которые можно повторить любое число раз, но результаты которых нельзя точно предвидеть. С каждым стохастическим экспериментом можно связать *пространство элементарных событий* Ω — совокупность возможных результатов эксперимента (*пространство результатов эксперимента*). *Случайные события*, связанные с данным стохастическим экспериментом — подмножества в пространстве элементарных событий Ω .

Будем считать, что совокупность \mathfrak{M} всех подмножеств, которые мы интерпретируем как случайные события, связанные с данным экспериментом, является σ -алгеброй.

Основные понятия теории вероятностей можно представить на языке теории множеств. (См. табл. на стр. 20).

Пространство Ω элементарных событий называется дискретным, если множество Ω конечно или счетно.

Вероятности в дискретных пространствах элементарных событий. Пусть пространство $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$ элементарных событий дискретно. Предположим, что каждому элементарному событию ω_k можно поставить в соответствие неотрицательное число p_k (вероят-

ность ω_k), причем $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Если A — случайное событие ($A \subset \Omega$),

| Теория множеств | Теория вероятностей |
|--|--|
| Множество Ω | Ω — <i>пространство элементарных событий</i> |
| Множество Ω | Ω — <i>достоверное событие</i> — событие происходящее при каждом осуществлении эксперимента |
| \emptyset (пустое множество) | \emptyset — <i>невозможное событие</i> — событие, которое не происходит при любом осуществлении эксперимента |
| $A \subset B$ | <i>Событие A влечет событие B</i> |
| $A \cup B$ (сумма множеств A и B) | $A \cup B$ — <i>событие, которое состоит в том, что происходит по крайней мере, одно из событий A или B</i> |
| $A \cap B$ (пересечение множеств A и B) | $A \cap B$ — <i>событие, которое состоит в том, что произойдет и A, и B</i> |
| $\bar{A} = \Omega \setminus A$ (дополнение A) | \bar{A} — <i>противоположное к A событие, состоящее в том, что A не произойдет</i> |
| $A \cap B = \emptyset$ (A и B — непересекающиеся множества) | $A \cap B = \emptyset$ — A и B — <i>несовместные события</i> |
| $A \setminus B$ (разность множеств A и B) | $A \setminus B$ — <i>разность событий A и B — событие, состоящее в том, что произойдет A и не произойдет B</i> |

то

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k,$$

где $P(A)$ называется вероятностью события A .

Имеют место свойства:

- $P(A) \geq 0$,
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, если события A и B несовместны,
- $P(\Omega) = 1$.

1.3.1. Монету подбрасывают дважды. Описать пространство элементарных событий. Описать события: A — по

крайней мере один раз появится герб; B — при втором подбрасывании появится герб.

1.3.2. Игральную кость подбрасывают один раз. Описать пространство элементарных событий. Описать событие A — появится число, которое делится на 3.

1.3.3. Игральную кость подбрасывают дважды. Описать пространство элементарных событий. Описать события: A — сумма очков, которые появились, равна 8; B — по крайней мере один раз появится 6.

1.3.4. Подбрасывают монету, а после этого подбрасывают игральную кость. Описать пространство элементарных событий.

1.3.5. Подбрасывают монету до тех пор, пока не выпадет герб. Описать пространство элементарных событий.

1.3.6. Построить множество элементарных событий в таком эксперименте: бросают монету и фиксируют, выпал ли герб; подбрасывание длится до тех пор, пока герб не выпадет дважды.

1.3.7. Пусть эксперимент состоит в измерении двух величин, которые принимают значения из отрезка $[0, 1]$. Описать пространство элементарных событий.

1.3.8. Построить множество элементарных событий для эксперимента, в котором измеряются n величин ξ_1, \dots, ξ_n , каждая из которых может принимать произвольные вещественные значения.

1.3.9. Найти вероятности событий A и B в задаче 1.3.1, считая, что все элементарные события равновозможны.

1.3.10. Найти вероятности событий A и B в задаче 1.3.3, считая что все элементарные события равновозможны.

1.3.11. а) Найти вероятность события A в задаче 1.3.2, считая что все элементарные события равновозможны; б) пусть бросают игральную кость, масса которой распределена так, что вероятность появления определенной грани пропорциональна ее номеру. Описать пространство элементарных событий, указать вероятность каждого элементарного события. Вычислить вероятность события A из задачи 1.3.2.

1.3.12. Из партии, содержащей N изделий, среди которых есть n бракованных, взяли m изделий. Описать пространство элементарных событий. Описать событие A : среди выбранных изделий l — бракованных ($n < N$, $l \leq m$). Вычислить вероятность A , считая, что все элементарные события равновозможны.

1.3.13. Построить множество элементарных событий в эксперименте, который состоит в выборе из урны, содержащей m белых и n черных шаров, k шаров, где $k < n + m$. Каково число элементарных событий?

Решить эту же задачу, если шары вынимаются последовательно один за одним.

1.3.14. Проверяется партия готовых изделий по двум признакам: размер и вес. Изделия, вес и размер которых меньше стандартных, бракуются; изделия, вес и размер которых больше стандартных, возвращаются на переработку; остальные изделия поставляются потребителю. Как построить множество элементарных событий в случае, когда проверяется партия товара из n изделий? Каково общее количество элементарных событий?

1.3.15. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 сначала выбирают одну; потом из четырех оставшихся цифр выбирают другую. Описать пространство элементарных событий. Считая, что все элементарные события равновозможны, вычислить вероятность следующих событий: а) первый раз выбрана нечетная цифра; б) второй раз выбрана нечетная цифра; в) и первый, и второй раз выбрана нечетная цифра.

1.3.16. Монету подбрасывают до тех пор, пока она не выпадет дважды подряд одной стороной. Описать пространство элементарных событий. Каждому элементарному событию, которое требует n подбрасываний, принимаем вероят-

ность $\frac{1}{2^n}$. Вычислить вероятность таких событий: а) эксперимент окончится до шестого подбрасывания; б) будет совершенно четное число подбрасываний; в) эксперимент продлится бесконечно долго.

1.3.17. Три игрока a , b , c проводят шахматный турнир по следующей схеме: в первом туре играют a и b , игрок c свободен; во втором туре играет победитель первого тура и c , а игрок, проигравший в первом туре, свободен. Турнир продолжается до тех пор, пока один из игроков не выиграет подряд две партии (он и объявляется победителем турнира). Ничейных партий нет. Описать пространство элементарных событий. Каждому элементарному событию, которое состоит из k партий, припишем вероятность $\frac{1}{2^k}$. Вычислить вероятности таких событий: а) победителем будет a ; б) победителем будет b ; в) победителем

будет с; г) победитель не выяснится до n -го тура; д) турнир никогда не окончится.

1.3.18. Рассматривается эксперимент, в котором фиксируется время, когда каждое из двух лиц приходит на место встречи. Считается, что каждое из них обязательно придет на место встречи в течение часа. Если τ_1 — момент прихода первого лица, а τ_2 — второго, то в качестве множества элементарных событий возьмем множество точек квадрата с координатами (τ_1, τ_2) , причем $0 \leq \tau_k \leq 1$ ($k = 1, 2$). Пусть вероятность события, состоящего в том, что точка (τ_1, τ_2) будет принадлежать определенной части этого квадрата, равна площади этой части.

а) Предположим, что тот, кто придет первым, будет ожидать второго время τ , после чего уйдет с места свидания. Какова вероятность, что встреча произойдет?

б) Какова вероятность того, что данное лицо придет на свидание раньше второго? Раньше второго на время q ($q < 1$)?

в) Каждое из лиц, которое приходит на место свидания, ожидает там время q . Какова вероятность того, что время, проведенное обоими лицами на месте свидания не меньше, чем t ($t < q < 1$)?

1.3.19. Эксперимент состоит в измерении трех величин, которые принимают значения между 0 и 1. Множеством элементарных событий считаем куб в пространстве со стороной 1, элементарное событие — точка этого куба с координатами (ξ, η, ζ) . Вероятность события, состоящего в том, что точка с координатами (ξ, η, ζ) будет принадлежать некоторой части куба K_1 , совпадает с объемом K_1 .

а) Какова вероятность события, которое состоит в существовании треугольника со сторонами ξ, η, ζ ?

б) Какова вероятность события, которое состоит в выполнении неравенства $\xi + \eta + \zeta < \frac{3}{2}$?

в) Найти вероятность события, состоящего в том, что

$$\max[\xi, \eta, \zeta] < t \quad (0 < t < 1).$$

г) Найти вероятность события, состоящего в том, что расстояние точки (ξ, η, ζ) от начала координат не меньше, чем t ($0 < t < 1$).

д) Какова вероятность события, которое состоит в выполнении неравенства $\xi\eta\zeta < t$, $0 < t < 1$?

I.3.20. Два различных шара кладут в две урны. Описать пространство элементарных событий. Считая, что все элементарные события равновозможны, вычислить вероятность того, что есть урна, в которой нет ни одного шара.

I.3.21. Два одинаковых шара кладут в две урны. Описать пространство элементарных событий. Считая, что все элементарные события равновозможны, вычислить вероятность того, что есть урна, не содержащая ни одного шара.

I.3.22. Мишень состоит из 10 кругов, ограниченных концентрическими окружностями с радиусами r_k ($k = 1, 2, \dots, 10$), причем $r_1 < r_2 < \dots < r_{10}$. Событие A_k состоит в попадании в круг радиуса r_k . Что означают события $B = \bigcup_{k=1}^5 A_k$, $C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$?

I.3.23. Указать события, противоположные таким событиям: а) A — появление герба при двух подбрасываниях монеты; б) B — три попадания при трех выстрелах; в) C — по крайней мере одно попадание при трех выстрелах.

I.3.24. Сделано три выстрела по мишени. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что при i -м выстреле есть попадание ($i = 1, 2, 3$). Выразить через события A_i такие события: а) A — произошло три попадания; б) B — не было ни одного попадания; в) только одно попадание; г) не менее двух попаданий.

I.3.25. Бросают две игральные кости. Пусть A — событие, которое состоит в том, что сумма очков нечетна; B — выпадет, по крайней мере, одна единица. Описать события $A \cap B$, $A \cup B$, $\overline{A \cap B}$. Найти их вероятности, считая, что все элементарные события равновозможны.

I.3.26. Пространство элементарных событий состоит из перестановок цифр 1, 2, 3, 4; все элементарные события равновозможны. Обозначим A_i — событие, которое состоит в том, что число i окажется на i -м месте ($i = 1, 2, 3, 4$). Доказать, что:

а) $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \subset A_4$;

б) $A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3} \subset \overline{A_4}$.

Вычислить вероятность событий $A_1 \cap A_2$, $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$.

I.3.27. Пусть A , B , C — три случайных события. Записать события, которые состоят в том, что из A , B , C : а) произошло только событие A ; б) произошли A и B

и не произошло C ; в) произошли все три события; г) произошло, по крайней мере, одно событие; д) произошло одно и только одно событие; е) произошло не более двух событий; ж) не произошло ни одно событие.

I.3.28. Доказать равенства $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

I.3.29. Доказать, что когда $A \supset B$, то:

а) $\bar{B} \supset \bar{A}$, б) $A \cap B = B$, в) $A \cup B = A$.

I.3.30. Упростить запись следующих событий:

а) $(A \cup B) \cup (A \cup \bar{B})$;

б) $(A \cup B) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$;

в) $(A \cup B) \cap (B \cup C)$.

I.3.31. Доказать равенства:

а) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus (A \cap B) = A \cap \bar{B}$;

б) $A \cap A = A \cup A = A$;

в) $A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup B$;

г) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$;

д) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

I.3.32. Доказать равенства:

а) $(A \cap B) \cup (C \cap D) = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{C} \cup \bar{D})$;

б) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \Omega$;

в) $(A \cup B) \cap (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = \emptyset$;

г) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

д) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;

е) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$.

I.3.33. Сумму двух событий $A \cup B$ можно выразить как сумму двух несовместных событий; $A \cup B = (A \setminus A \cap B) \cup B$. Представить аналогичным образом сумму трех событий.

I.3.34. Пусть A_n ($n = 1, 2, \dots$) — последовательность случайных событий; B_m — событие, которое состоит в том, что среди событий A_1, A_2, \dots первым произойдет A_m . Выразить событие B_m через A_1, \dots, A_m . Доказать, что события B_n несовместны. Выразить событие $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ через A_1, A_2, \dots .

I.3.35. Пусть пространство Ω элементарных событий дискретно: $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n, \dots\}$. Предположим, что каждому элементарному событию ω_k соответствует вероят-

ность p_k ($p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$), а вероятность события A

определяется как $P(A) = \sum_{\omega_k \in A} p_k$. Доказать, что:

а) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;

б) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$;

в) $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} S_k^{(n)}$,

где $S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k})$.

I.3.36. Пусть $P_{[m]}$ — вероятность того, что среди событий A_1, \dots, A_n произойдет ровно m событий. Доказать, что

$$P_{[m]} = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m+k}^k S_{m+k}^{(n)}.$$

I.3.37. Пусть P_m — вероятность осуществления не менее m событий из данных событий A_1, \dots, A_n . Доказать, что

$$P_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k C_{m-1+k}^{m-1} S_{m+k}^{(n)}.$$

§ 4. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть пространство Ω состоит из n элементарных равновероятных событий, а в состав A входят m из этих событий. Тогда

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

I.4.1. Найти вероятность того, что среди k выбранных наудачу цифр: а) нет цифры 0; б) нет цифры 1; в) нет цифр 0 и 1; г) нет цифры 0 или нет цифры 1.

I.4.2. В группе r студентов. Какова вероятность того, что, по крайней мере, у двух из них совпадают дни рождения?

I.4.3. В группе r студентов. Какова вероятность того, что, по крайней мере, два из них родились в одном и том же месяце?

I.4.4. Игральную кость бросают 6 раз. Вычислить вероятность того, что выпадут все шесть граней.

I.4.5. В лифте 7 пассажиров; лифт останавливается на десяти этажах. Какова вероятность того, что никакие два пассажира не выйдут на одном и том же этаже?

I.4.6. Доказать, что более вероятно получить, по крайней мере, одну единицу при подбрасывании четырех игральных костей, чем при 24 подбрасываниях двух костей, по крайней мере, один раз получить две единицы. (Ответ известен как «парадокс де-Мере». Придворный кавалер и азартный игрок Шевалье де-Мере, современник Блеза Паскаля, считал эти вероятности равными и обвинял математиков в своих проигрышах.)

I.4.7. Вычислить вероятность того, что дни рождения 12 лиц окажутся в разных месяцах года.

I.4.8. Вычислить вероятность того, что для данных тридцати лиц из 12 месяцев года на 6 месяцев попадает по два дня рождения и на 6 — по 3 дня рождения.

I.4.9. n лиц, среди которых есть A и B , строятся в шеренгу в произвольном порядке. Какова вероятность того, что между A и B будет находиться ровно r лиц?

I.4.10. а) Из урны, в которой лежат n белых и m черных шаров, взяли наудачу k шаров. Какова вероятность того, что среди вынутых шаров будет r белых шаров ($r \leq n$)?

б) Доказать тождество
$$\sum_{r=0}^k C_n^r C_m^{k-r} = C_{n+m}^k$$

I.4.11. Среди N изделий есть M бракованных. Наугад выбирают n изделий. Какова вероятность того, что среди них m бракованных изделий ($m < M$)? Какова вероятность того, что среди них больше, чем m , бракованных изделий?

I.4.12. В лотерее есть n билетов, среди них m выигрышных. Какова вероятность выигрыша для обладателя r билетов?

I.4.13. На экзамене может быть предложено N вопросов. Студент знает ответы на n вопросов. Экзаменатор предлагает студенту k вопросов, а для того, чтобы сдать экзамен, нужно ответить не менее, чем на r вопросов ($r < k$). Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен?

I.4.14. Участник лотереи «Спортлото» из 49 названий видов спорта (обозначенных числами от 1 до 49) должен назвать 6. Полный выигрыш получает тот, кто правильно укажет все шесть названий. Выигрыши получают и те, кто

угадает не менее трех названий. Вычислить вероятность полного выигрыша в спортлото. Вычислить вероятность того, что участник спортлото угадает 5, 4 и 3 названия. Какова вероятность получить выигрыш в спортлото?

1.4.15. Для уменьшения общего количества игр $2n$ команд разбивают на 2 подгруппы по n команд каждая. Какова вероятность того, что две самые сильные команды окажутся: а) в разных подгруппах; б) в одной подгруппе? Какова вероятность того, что четыре самые сильные команды попадут по две в разные подгруппы?

1.4.16. Из чисел $1, 2, \dots, N$ выбирают наудачу k разных чисел. Какова вероятность того, что: а) каждое из выбранных чисел кратно данному числу q ? б) каждое из выбранных чисел кратно, по крайней мере, одному из двух данных взаимно простых чисел q_1 и q_2 ? в) среди выбранных чисел есть по крайней мере одно, кратное q ?

1.4.17. Из множества $\{1, 2, \dots, N\}$ выбирают последовательно с возвращением k чисел (каждое из чисел $1, 2, \dots, N$ может быть выбрано $0, 1, \dots, k$ раз). Какова вероятность того, что: а) каждое из выбранных чисел кратно данному числу q ? б) каждое из выбранных чисел будет кратно, по крайней мере, одному из двух данных взаимно простых чисел q_1 и q_2 ? в) среди выбранных чисел имеется по крайней мере одно, кратное числу q ?

1.4.18. Из множества чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ выбирают наудачу k разных чисел. Какова вероятность того, что: а) будет выбрана группа из k последовательных чисел? б) при последовательном выборе будет получена группа из k последовательных чисел, расположенных в порядке возрастания? в) при последовательном выборе будет получена группа из k различных чисел? г) при последовательном выборе будет получена группа из k различных чисел, расположенных в возрастающем порядке?

1.4.19. Из множества чисел $\{1, 2, \dots, N\}$ выбирают наудачу k чисел, причем каждое число может быть выбрано $0, 1, \dots, k$ раз. Какова вероятность того, что: а) будет выбрана группа из k последовательных чисел? б) при последовательном выборе будет получена в возрастающем порядке группа k последовательных чисел? в) при последовательном выборе будет получена группа из k разных чисел? г) при последовательном выборе будет получена группа из k разных чисел, расположенных в порядке возрастания?

1.4.20. Бросают 12 игральных костей. Какова вероятность того, что каждое из чисел 1, 2, ..., 6 выпадет дважды?

1.4.21. Бросают n игральных костей. Какова вероятность того, что выпадает n_1 единиц, n_2 двоек, ..., n_6 шестерок ($n_1 + n_2 + \dots + n_6 = n$)?

1.4.22. Бросают 5 игральных костей. Какова вероятность того, что: а) сумма очков на первых двух будет больше, чем на трех последних? б) существуют две такие кости, что сумма очков на них больше, чем на трех остальных?

1.4.23. Написаны n писем, но адреса на конвертах написаны наудачу. Какова вероятность того, что: а) по крайней мере один из адресатов получит предназначенное ему письмо? б) m адресатов получают соответствующие письма?

1.4.24. Числа 1, 2, ..., n расположены наудачу. Какова вероятность того, что, по крайней мере, одно число будет равно номеру своего места? К какому пределу стремится эта вероятность при $n \rightarrow \infty$?

1.4.25. Выбирают наудачу один член определителя n -го порядка. Какова вероятность того, что он не содержит элементов главной диагонали?

1.4.26. Статистика Максвелла — Больцмана. Каждая из n различных частиц бросается наудачу в одну из N ячеек.

а) Какова вероятность того, что в первой, второй и т. д., N -й ячейке будет соответственно n_1, n_2, \dots, n_N частиц?

б) Найти вероятность p_k того, что данная ячейка содержит k частиц. Для какого значения k вероятность p_k будет максимальной?

в) Доказать, что $p_k \rightarrow \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, если n и N возрастают так, что среднее число частиц на одну ячейку $\frac{n}{N} \rightarrow \lambda$.

г) Какова вероятность того, что в каждой ячейке есть, по крайней мере, одна частица ($n \geq N$)?

д) Какова вероятность того, что занято ровно r ячеек?

1.4.27. Поток из n космических частиц захватывается системой из N счетчиков. Каждая частица с одинаковой вероятностью попадает в любой из счетчиков. Какова вероятность того, что наличие частиц будет зарегистрировано r счетчиками?

1.4.28. Поезд состоит из N вагонов. Каждый из n пассажиров выбирает себе вагон наугад. Какова вероятность того, что: а) в каждом вагоне будет, по крайней мере, один пассажир? б) будет занято ровно r вагонов?

1.4.29. В три вагона поезда заходят девять пассажиров. Какова вероятность того, что: а) в первый вагон войдет три пассажира? б) в каждый вагон войдет по три пассажира? в) в один из вагонов войдет четыре, в другой — три и в третий — два пассажира?

1.4.30. Статистика Бозе — Эйнштейна. Каждая из n неразличимых частиц попадает в одну из N ячеек.

а) Какова вероятность того, что в первую, вторую и т. д., N -ю ячейку попадет соответственно n_1, \dots, n_N частиц, если равновероятными считаются любые размещения, которые отличаются числом частичек в ячейках.

б) Доказать, что вероятность того, что в данной ячейке будет k частиц, равна

$$q_k = \frac{C_{N+n-k-2}^{n-k}}{C_{N+n-1}^n}.$$

в) Доказать, что при $N > 2$ $q_0 > q_1 > q_2 > \dots$, то есть 0 — наиболее вероятное число частиц в данной ячейке.

г) Доказать, что

$$q_k \rightarrow \frac{\lambda^k}{(1 + \lambda)^{k+1}},$$

когда n и N возрастают так, что $\frac{n}{N} \rightarrow \lambda$.

д) Какова вероятность того, что ровно m ячеек будут пустыми?

1.4.31. Статистика Ферми — Дирака. Каждая из n неразличимых частиц попадает в одну из N ячеек ($n < N$). Какова вероятность того, что в первую, вторую, ... N -ю ячейку попадет соответственно n_1, n_2, \dots, n_N частиц, если равновероятными считаются все размещения, которые удовлетворяют запрету Паули (в каждой ячейке может быть не больше одной частицы)?

1.4.32. Возле кассы кинотеатра собралось $m + n$ человек, причем n из них имеют монеты стоимостью в 50 коп., а остальные m имеют только по одному рублю ($m \leq n$). Стоимость билета 50 коп. Какова вероятность того, что ни одному покупателю не придется ожидать сдачи, если

в начале работы: а) в кассе не было денег; б) в кассе есть p монет стоимостью в 50 коп.?

1.4.33. Кандидат A собрал на выборах a голосов, а кандидат B — b голосов ($a > b$). Избиратели голосовали последовательно. Какова вероятность того, что при голосовании кандидат A всегда был впереди по количеству отданных за него голосов? (Задача Бертрана о баллотировке).

1.4.34. Если при баллотировании кандидат A наберет a голосов, а кандидат B — b голосов, причем $a \geq \mu b$, где μ — неотрицательное целое число, то вероятность того, что при последовательном подсчете бюллетеней число голосов за A будет все время в μ раз превышать число голосов, поданных за B , равна $\frac{a - \mu b}{a + b}$. Доказать это.

1.4.35. В урне есть a карточек, обозначенных числом 0, и b карточек, обозначенных числом $\mu + 1$. Карточки вынимаются из урны последовательно без возвращения. Вероятность того, что для всех r ($r = 1, 2, \dots, a + b$) сумма первых r вынутых чисел меньше r , равна $\frac{a - \mu b}{a + b}$. Доказать это.

1.4.36. Некто выпивает в случайном порядке n стаканов вина и n стаканов воды (все стаканы одинакового объема). Вычислить вероятность того, что выпитое им количество вина после каждого стакана не будет превышать выпитое количество воды. Какова вероятность того, что ровно после $2r$ стаканов выпитое количество вина не превышает выпитое количество воды?

1.4.37. В гости пришли n лиц, причем все были в галошах. Расходясь, гости выбрали галоши наудачу. Какова вероятность того, что каждый возьмет правую и левую галошу?

1.4.38. В городе с населением $(n + 1)$ человек некто узнает новость. Он передает ее первому встречному, тот еще одному и т. д. На каждом шаге тот, кто узнал новость, может с одинаковой вероятностью передать ее любому из n человек. Какова вероятность того, что в течение r единиц времени: а) новость не возвращается к человеку, который узнал ее первым; б) новость никем не будет повторена?

Решить эту задачу, предполагая, что на каждом шаге новость сообщается группе из N случайно выбранных лиц.

1.4.39. Множество K состоит из $(n + 1)$ лиц. Некоторое лицо A пишет два письма случайно выбранным из K адресатам, которые образуют «первое поколение» K_1 . Лицо из K_1 делает то же, в результате чего образуется «второе поколение», и т. д. Найти вероятность того, что лицо A не входит ни в одно из «поколений» K_1, K_2, \dots, K_r .

§ 5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

В сформулированных ниже задачах рассматривается следующая схема: в некоторой области Ω n -мерного пространства наудачу выбирают точку. Под выражением «точка взята наудачу» имеется в виду следующее: вероятность $P(A)$ того, что точка будет взята из области A ($A \subset \Omega$) равна

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где $m(\cdot)$ — лебегова мера на Ω .

1.5.1. На отрезке длины l наудачу взяты две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превышает kl , где $0 < k < 1$?

1.5.2. Два судна должны подойти к одному причалу. Появление судов — независимые случайные события, равновозможные в течение суток. Найти вероятность того, что одному из судов придется ждать освобождения причала, если время стоянки первого судна — один час, а второго — два часа.

1.5.3. На паркетный пол наудачу бросают монету диаметра d . Паркет имеет форму квадратов со стороной a ($a > d$). Какова вероятность того, что монета не пересекает ни одну из сторон квадратов паркета?

1.5.4. В круг радиуса R вписан правильный n -угольник. В круг наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что точка окажется внутри n -угольника?

1.5.5. Какова вероятность того, что из трех наудачу взятых отрезков длины не больше a можно построить треугольник?

1.5.6. На плоскости проведены параллельные прямые, расстояние между которыми равно $2a$. На плоскость наудачу бросают круг радиуса r ($r < a$). Какова вероятность того, что круг не пересекает ни одну прямую?

1.5.7. На плоскости проведены параллельные прямые, расстояния между которыми равны поочередно 1,5 см и

8 см. На плоскость бросают наудачу круг радиус 2,5 см. Какова вероятность того, что этот круг не пересекает ни одну из линий?

1.5.8. На окружности единичного радиуса с центром в начале координат наудачу выбирают точку. Какова вероятность того, что: а) проекция точки на диаметр находится от центра на расстоянии, не превышающем r ($r < 1$); б) расстояние от выбранной точки до точки с координатами $(1, 0)$ не превышает r ?

1.5.9. На окружности радиуса R наудачу взяты две точки. Какова вероятность того, что расстояние между ними не превышает r ($r \leq 2R$)?

1.5.10. В круг радиуса R наудачу бросают точку. Какова вероятность того, что расстояние от этой точки до центра круга не превышает r ?

1.5.11. На окружности радиуса R наудачу взяты три точки A, B, C . Какова вероятность того, что треугольник ABC остроугольный?

1.5.12. Стержень длиной l наудачу разломан на три части. Какова вероятность того, что из образовавшихся частей можно составить треугольник?

1.5.13. Стержень длины l наудачу разломан на три части. Какова вероятность того, что длина меньшей части не превышает $l/3$?

1.5.14. В сфере радиуса R взяты наудачу N точек. Чему равна вероятность того, что расстояние от центра до ближайшей точки не меньше, чем r ? Найти предел этой вероятности, если $R \rightarrow \infty$ и $\frac{N}{R^3} \rightarrow \frac{4}{3}\pi\lambda$.

1.5.15. (З а д а ч а Б ю ф ф о н а). На плоскости проведены параллельные прямые, расстояние между которыми равно $2a$.

а) На эту плоскость бросают наудачу иглу длины $2l$. Какова вероятность того, что игла пересечет одну из прямых?

б) На плоскость бросают выпуклый контур, диаметр которого меньше $2a$. Какова вероятность того, что контур пересечет одну из параллельных прямых?

1.5.16. Какой толщины должна быть монета, чтобы вероятность падения на ребро была равна $\frac{1}{3}$?

§ 6. АКСИОМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пусть Ω — пространство элементарных событий, \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств Ω (σ -алгебра случайных событий), т. е.

$$A_1) \Omega \subset \mathfrak{A};$$

$$A_2) \text{ если } A \in \mathfrak{A}, \text{ то } \bar{A} \in \mathfrak{A};$$

$$A_3) \text{ если } A_i \in \mathfrak{A} \ (i = 1, 2, \dots), \text{ то } \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathfrak{A}.$$

Предположим, что каждому случайному событию A поставим в соответствие число $P(A)$ такое, что выполнены условия:

$$P_1) P(A) \geq 0 \text{ для каждого } A \in \mathfrak{A};$$

$$P_2) P(\Omega) = 1;$$

$P_3)$ если последовательность $\{A_n\}$ случайных событий такова, что $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

Утверждения $A_1, A_2, A_3, P_1, P_2, P_3$ и составляют систему аксиом теории вероятностей. Измеримое пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — пространство Ω с мерой $P(\cdot)$ — называют вероятностным пространством.

I.6.1. С помощью аксиом теории вероятностей доказать, что:

$$a) P(\emptyset) = 0; \quad б) P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

$$в) \text{ если } A \subset B, \text{ то } P(A) \leq P(B);$$

$$г) P(A) \leq 1 \text{ для каждого случайного события } A \in \mathfrak{A}.$$

I.6.2. Пусть A и B — случайные события. Доказать, что

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

I.6.3. Пусть A, B, C — случайные события. Доказать, что

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - \\ - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

I.6.4. Доказать, что

$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B);$$

$$P(A \Delta B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B).$$

I.6.5. Доказать, что для любых двух событий A и B

$$P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B) \leq P(A) + P(B); \\ \max[P(A), P(B)] \leq P(A \cup B) \leq 2 \max[P(A), P(B)].$$

1.6.6. Известны вероятности событий $A, B, A \cap B$. Найти вероятности событий: а) $\bar{A} \cup \bar{B}$; б) $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$; в) $\bar{A} \cap \bar{B}$; г) $\overline{\bar{A} \cap \bar{B}}$; д) $\overline{\bar{A} \cup \bar{B}}$; е) $\overline{\bar{A} \cap B}$; ж) $\bar{A} \cap (A \cup B)$; з) $A \cup (\bar{A} \cap B)$.

1.6.7. Пусть $\Omega = (-\infty, +\infty)$; \mathfrak{A} есть σ -алгебра всех подмножеств Ω . Для каждого $A \in \mathfrak{A}$ положим

$$P(A) = \sum_{n \in A} \frac{1}{2^n},$$

где n принимает целые положительные значения. Является ли $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ вероятностным пространством?

1.6.8. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ — произвольное счетное множество, $\{P_n\}$ — последовательность неотрицательных чисел таких, что $\sum_{n=1}^{\infty} P_n = 1$, \mathfrak{A} — система всех подмножеств Ω . Для каждого $A \in \mathfrak{A}$ положим:

$$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P_i.$$

Доказать, что $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство.

1.6.9. Пусть Ω — область в n -мерном евклидовом пространстве R^n , которая имеет конечную меру Лебега; \mathfrak{M} — система подмножеств Ω , измеримых по Лебегу; $m(\cdot)$ — мера Лебега на R^n . Пусть для каждого множества $A \in \mathfrak{M}$ выполняется равенство

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}.$$

Доказать, что $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$ — вероятностное пространство.

1.6.10. Пусть A и B — случайные события, p_0 — вероятность того, что не произойдет ни одно из этих событий, p_1 — вероятность того, что произойдет одно и только одно событие, p_2 — вероятность того, что произойдут оба события. Выразить p_0, p_1, p_2 через $P(A), P(B), P(A \cap B)$.

1.6.11. Пусть p_n — вероятность того, что произошли n событий из событий A, B, C ($n = 0, 1, 2, 3$). Выразить p_0, p_1, p_2, p_3 через $P(A), P(B), P(C), P(A \cap B), P(A \cap C), P(B \cap C), P(A \cap B \cap C)$.

1.6.12. Пусть $P(A) \geq 0,8; P(B) \geq 0,8$. Доказать, что $P(A \cap B) \geq 0,6$.

1.6.13. Пусть A_1, \dots, A_n — случайные события. Доказать, что

$$a) P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i\right) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i);$$

$$б) P\left(\bigcap_{i=1}^n A_i\right) \geq 1 - \sum_{i=1}^n P(\bar{A}_i).$$

1.6.14. Доказать, что для любых n событий A_1, \dots, A_n

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) \geq P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - (n-1).$$

1.6.15. Если $A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \subset A$, то

$$P(A) \geq P(A_1) + \dots + P(A_n) - (n-1).$$

Доказать это.

1.6.16. Доказать, что для любых двух событий A и B справедливо соотношение:

$$|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

1.6.17. Доказать, что для любых трех событий A, B и C справедливо соотношение:

$$|P(A \cap B) - P(A \cap C)| \leq P(B \Delta C).$$

1.6.18. Доказать, что

$$P^2(A \cap B) + P^2(\bar{A} \cap B) + P^2(A \cap \bar{B}) + P^2(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{4},$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{4}.$$

1.6.19. Доказать неравенство

$$P(A \Delta B) \leq P(A \Delta C) + P(C \Delta B).$$

Замечание. Смысл этой задачи таков: если назвать расстоянием между случайными событиями A и B величину $\rho(A, B) = P(A \Delta B)$, то для $\rho(A, B)$ выполняется неравенство треугольника

$$\rho(A, B) \leq \rho(A, C) + \rho(C, B).$$

1.6.20. Определим расстояние между случайными событиями A и B так:

$$\rho^*(A, B) = \begin{cases} \frac{P(A \Delta B)}{P(A \cup B)}, & \text{если } P(A \cup B) > 0; \\ 0, & \text{если } P(A \cup B) = 0. \end{cases}$$

Доказать что для $\rho^*(A, B)$ выполняется неравенство треугольника.

1.6.21. Пусть p_1, p_2, p_{12} — действительные числа. Доказать, что для того, чтобы на некотором вероятностном пространстве существовали случайные события A и B такие, что $p_1 = P(A)$, $p_2 = P(B)$, $p_{12} = P(A \cap B)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись неравенства:

$$1 - p_1 - p_2 - p_{12} \geq 0,$$

$$p_1 - p_{12} \geq 0,$$

$$p_2 - p_{12} \geq 0, \quad p_{12} \geq 0.$$

1.6.22. Пусть A_1, \dots, A_n — случайные события и

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Используя метод математической индукции, доказать, что

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} S_k^{(n)}.$$

1.6.23. Пусть A_1, A_2 — случайные события, \mathfrak{M} — минимальная алгебра событий, содержащая события A_1 и A_2 . Доказать, что каждое случайное событие B , принадлежащее \mathfrak{M} , является суммой некоторого числа случайных событий

$$A_1 \cap A_2, A_1 \cap \bar{A}_2, \bar{A}_1 \cap A_2, \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2.$$

Сколько различных случайных событий содержит алгебра \mathfrak{M} ?

1.6.24. Пусть A_1, \dots, A_n — случайные события, \mathfrak{M} — минимальная алгебра, содержащая случайные события A_1, \dots, A_n . Доказать, что каждое случайное событие B , которое принадлежит \mathfrak{M} , является суммой некоторого числа, не превышающего 2^n , «основных» случайных событий вида

$$\gamma = A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \bar{A}_{j_1} \cap \bar{A}_{j_2} \cap \dots \cap \bar{A}_{j_{n-k}},$$

где (i_1, \dots, i_k) — некоторое k -подмножество множества $\{1, 2, \dots, n\}$, j_1, \dots, j_{n-k} — те числа множества $\{1, \dots, n\}$, которые не выходят во множество (i_1, \dots, i_k) .

Сколько множеств содержит алгебра \mathfrak{M} ?

1.6.25. Пусть A_1, \dots, A_n — случайные события, \mathfrak{M} — минимальная алгебра, содержащая случайные события A_1, \dots, A_n ; c_1, \dots, c_m — действительные числа, B_1, \dots, B_m — произвольные случайные события из \mathfrak{M} . Доказать, что неравенство $\sum_{k=1}^m c_k \mathbf{P}(B_k) \geq 0$ имеет место тождественно относительно A_1, \dots, A_n тогда и только тогда, когда это неравенство выполняется для любой системы событий A_1, \dots, A_n , в которой $\mathbf{P}(A_k)$ ($k = \overline{1, n}$) равно нулю или единице.

Замечание. Утверждение задачи 1.6.25 можно использовать для доказательства различных неравенств и равенств для вероятностей случайных событий (задачи 1.6.26—32). Например, чтобы доказать соотношение

$$\sum_{k=1}^m c_k \mathbf{P}(B_k) \geq 0$$

и, в частности,

$$\sum_{k=1}^m c_k \mathbf{P}(B_k) = 0$$

для произвольных случайных события A_1, \dots, A_n , достаточно проверить эти соотношения для случая, когда каждое из событий A_1, \dots, A_n имеет вероятность нуль либо единицу.

1.6.26. Используя утверждение задачи 1.6.25, решить задачу 1.6.22.

1.6.27. Пусть $p_{[r]}$ — вероятность того, что произойдет ровно r событий A_1, \dots, A_n . Доказать, что

$$p_{[r]} = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k C_{r+k}^r S_{r+k}^{(n)} \quad (r = 0, \dots, n),$$

где $S_0^{(n)} = 1$,

$$S_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

1.6.28. Пусть p_r — вероятность того, что произойдет r или больше из n событий A_1, \dots, A_n . Доказать, что

$$p_r = \sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k C_{r+k-1}^{r-1} S_{r+k}^{(n)}.$$

1.6.29. Доказать, что

$$\frac{S_{r+1}^{(n)}}{C_{n+1}^{r+1}} \leq \frac{S_r^{(n)}}{C_n^r} \quad (r = 0, \dots, n-1)$$

(неравенство М. Фреше).

1.6.30. Доказать, что

$$\frac{C_{n+1}^{r+1} - S_{r+1}^{(n)}}{C_{n-1}^r} \leq \frac{C_n^r - S_r^{(n)}}{C_{n-1}^{r-1}} \quad (r = 1, 2, \dots, n-1).$$

1.6.31. Доказать, что

$$\mathbf{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} R_k^{(n)},$$

где

$$R_k^{(n)} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{P}(A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup \dots \cup A_{i_k}).$$

1.6.32. Доказать, что

$$S_r^{(n)} - (r+1) S_{r+1}^{(n)} \leq \mathbf{P}_{[r]} \leq S_r^{(n)}.$$

1.6.33. Пусть p_1, \dots, p_r — неотрицательные числа такие, что $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Обозначим через $S_r(p_1, \dots, p_r)$ — вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, где Ω — множество из r элементов $\omega_1, \dots, \omega_r$, \mathfrak{A} — совокупность всех подмножеств Ω и $\mathbf{P}(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$. Пусть A_1, \dots, A_n — произвольные случайные события; \mathfrak{M} — минимальная алгебра, которая содержит A_1, \dots, A_n . B_1, \dots, B_m — произвольные случайные события из \mathfrak{M} . Рассмотрим неравенство

$$\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m c_{ji} \mathbf{P}(B_j) \mathbf{P}(B_i) \geq 0. \quad (1)$$

Доказать следующее утверждение: если неравенство (1) выполняется:

а) для любой системы событий A_1, \dots, A_n , каждое из которых принадлежит $S_1(1)$;

б) для любой системы событий A_1, \dots, A_n , каждое из которых принадлежит $S_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, то неравенство (1) выполняется тождественно для любой системы событий A_1, \dots, A_n .

Замечание. Утверждения этой задачи можно использовать для доказательства некоторых неравенств и равенств между случайными событиями (задачи I.6.34—37).

I.6.34. Доказать, что для любых случайных событий A_1 и A_2 выполняется неравенство

$$P(A_1 \cup A_2)P(A_1 \cap A_2) \leq P(A_1)P(A_2).$$

I.6.35. Доказать, что для любых случайных событий A_1 и A_2 выполняется соотношение:

$$P^2(A_1 \cup A_2) + P^2(A_1 \cap A_2) = P^2(A_1) + P^2(A_2) + 2P(A_1 \cap \bar{A}_2)P(\bar{A}_1 \cap A_2).$$

I.6.36. Доказать, что для любых случайных событий A_1, \dots, A_n выполняется неравенство:

$$P\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} \geq \frac{\left\{\sum_{i=1}^n P(A_i)\right\}^2}{2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^n P(A_i)}.$$

I.6.37. Доказать, что

$$kS_k^{(n)} \geq S_{k-1}^{(n)}(S_1^{(n)} - k + 1).$$

I.6.38. Пусть A_1, \dots, A_n — случайные события и

$$C_k^{(n)} = \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}.$$

Доказать, что

$$\text{а) } \sum_{k=1}^n P(C_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^n P(A_k); \quad \text{б) } \prod_{k=1}^n P(C_k^{(n)}) \leq \prod_{k=1}^n P(A_k).$$

I.6.39. Пусть Ω — счетное множество $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$, \mathfrak{A} — совокупность всех подмножеств Ω , мера $P(\cdot)$ задана соотношениями $P\{\{\omega_n\}\} = p_n$ ($\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$, $p_n \geq p_{n+1} \geq 0$).

Доказать, что: а) множество тех x , для которых существует $A \subset \mathfrak{A}$, такое, что $P(A) = x$, является совершенным

множеством; б) множество $\{P(A), A \in \mathfrak{A}\}$ тогда и только тогда совпадает с отрезком $[0, 1]$, когда

$$p_n \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \quad (n = 1, 2, \dots).$$

1.6.40. Вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ называется не атомарным, если для каждого события $A \in \mathfrak{A}$ с $P(A) > 0$ существует событие $B \subseteq A$ такое, что $0 < P(B) < P(A)$. Доказать, что для неатомарного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ множество значений $P(A)$ ($A \in \mathfrak{A}$) совпадает со всем интервалом $[0, 1]$.

1.6.41. Доказать, что множество значений $P(A)$ в случае произвольного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ есть замкнутое множество.

1.6.42. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство. Случайное событие $A \in \mathfrak{A}$ называется атомом, если:

- а) $P(A) > 0$;
- б) для каждого случайного события $B \in \mathfrak{A}$ такого, что $B \subset A$, имеем:

$$P(B) = 0 \quad \text{или} \quad P(A \setminus B) = 0.$$

Доказать, что:

- а) множество всех атомов вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ не более, чем счетно;
- б) Ω можно разложить на не более, чем счетное объединение атомов и «неатомарную» часть;
- в) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует конечное разбиение Ω на множества из \mathfrak{A} такое, что каждое множество из этого разбиения или имеет вероятность, которая не превышает ε , либо является атомами с вероятностью больше ε .

§ 7. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ, НЕЗАВИСИМЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Условная вероятность. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство и $P(B) > 0$, $B \in \mathfrak{A}$. Условной вероятностью события A ($A \in \mathfrak{A}$) при условии, что произошло событие B , называется величина

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Формула умножения вероятностей. Если $P(B) > 0$, то $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B)$.

Независимые случайные события. Случайные события A и B ($A \in \mathfrak{A}$, $B \in \mathfrak{B}$) называются независимыми, если

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Независимые в совокупности случайные события. Случайные события A_1, \dots, A_n ($A_i \in \mathfrak{A}$, $i = \overline{1, n}$) называются независимыми в совокупности, если $P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \dots P(A_{i_k})$ для любых $k = 1, \dots, n$ и

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n.$$

Полная группа событий. Случайные события H_1, \dots, H_n ($H_i \in \mathfrak{A}$, $i = \overline{1, n}$) образуют полную группу событий, если

1) любые два события несовместны ($H_i \cap H_k = \emptyset$, $i \neq k$),

$$2) \bigcup_{i=1}^n H_i = \Omega.$$

Формула полной вероятности. Если H_1, \dots, H_n — полная группа событий и $P(H_i) > 0$ ($i = \overline{1, n}$), то для любого события A ($A \in \mathfrak{A}$) верно равенство

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) P(A/H_i).$$

Формула полной вероятности имеет место и для счетного количества событий:

если $\{H_i\}$ — последовательность случайных событий такая, что

$$1) H_i \cap H_k = \emptyset \quad (i \neq k);$$

$$2) \bigcup_{i=1}^{\infty} H_i = \Omega,$$

то для любого события $A \in \mathfrak{A}$ выполняется равенство

$$P(A) = \sum_{i=1}^{\infty} P(H_i) P(A/H_i).$$

Формула Байеса. Если H_1, \dots, H_n — полная группа событий, $P(H_i) > 0$ ($i = \overline{1, n}$), а B — произвольное случайное событие ($B \in \mathfrak{B}$) такое, что $P(B) > 0$, то

$$P(H_i/B) = \frac{P(H_i) P(B/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) P(B/H_k)}.$$

1.7.1. Дважды бросают монету. а) Описать пространство элементарных событий; б) описать события: A — при первом подбрасывании выпал герб; B — при втором подбрасывании выпал герб; в) вычислить $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$, $P(B/A)$.

1.7.2. Трижды бросают монету. а) Описать пространство элементарных событий; б) описать события: A — дважды выпал герб, B — по крайней мере, один раз выпал герб; в) вычислить $P(A \cap B)$, $P(B)$ и $P\{A/B\}$.

1.7.3. Из множества семей, которые имеют двух детей, выбрана одна семья. Все элементарные события равновероятны. Какова вероятность того, что: а) в этой семье 2 мальчика, если известно, что в ней есть один мальчик? б) в семье 2 мальчика, если известно, что старший ребенок мальчик?

1.7.4. Бросают две игральные кости. Какова вероятность того, что выпадет, по крайней мере, одна шестерка, если известно, что сумма очков равна 8?

1.7.5. Бросают три игральные кости. Какова вероятность того, что, по крайней мере, один раз выпадет шестерка, если на всех трех кубиках выпали разные грани?

1.7.6. Из урны, которая содержит m белых и n черных шаров, берут последовательно 2 шара. Известно, что первый шар белый. Какова вероятность того, что второй шар также окажется белым?

1.7.7. Известно, что при подбрасывании 10 игровых костей выпала, по крайней мере, одна единица. Какова вероятность того, что выпали 2 или больше единиц?

1.7.8. Известно, что 5% мужчин и 0,25% всех женщин — дальтоники. Наудачу выбранное лицо — дальтоник. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое количество).

1.7.9. Доказать, что если A и B несовместны и $P(A \cup B) \neq 0$, то

$$P\{A/A \cup B\} = \frac{P(A)}{P(A) + P(B)}.$$

1.7.10. Дано: $P(A/B) = 0,7$, $P(A/\bar{B}) = 0,3$, $P(B/A) = 0,6$. Вычислить $P(A)$.

1.7.11. Пусть $P(A) = p$, $P(B) = 1 - \varepsilon$, где ε — малое число. Оценить $P(A/B)$ сверху и снизу.

1.7.12. Доказать, что

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \prod_{k=1}^{n-1} P(A_{k+1}/A_1 \cap \dots \cap A_k).$$

1.7.13. Доказать, что события A и B в задаче 1.7.1 независимы.

1.7.14. Из всех семей с двумя детьми выбрана одна. Описать пространство элементарных событий и случайные события; A — «в семье есть мальчик и девочка», B — «в семье не больше одной девочки». Все элементарные события равновероятны. Вычислить $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ и доказать, что события A и B зависимы.

1.7.15. Из всех семей с тремя детьми выбрана одна. Описать пространство элементарных событий и случайные события A и B в задаче 1.7.14. Все элементарные события равновероятны. Вычислить $P(A)$, $P(B)$, $P(A \cap B)$ и доказать, что события A и B независимы.

1.7.16. Пусть $P(B) > 0$ и выполняется равенство $P(A/B) + P(\bar{A}) = 1$. Что можно сказать о событиях A и B ?

1.7.17. События A и B несовместны и $P(B) > 0$. Вычислить

$$P(A/B).$$

1.7.18. Доказать, что если A и B несовместные события с положительными вероятностями, то A и B зависимы.

1.7.19. Если события A и B независимы, то \bar{A} и B , A и \bar{B} , \bar{A} и \bar{B} также независимы. Доказать это.

1.7.20. Пусть $P(A) > 0$ и $P(B/\bar{A}) = P(B/A)$. Доказать, что A и B независимы.

1.7.21. События A и B_1 и A и B_2 независимы, причем B_1 и B_2 несовместны. Доказать, что события A и $B_1 \cup B_2$ независимы.

1.7.22. Бросают две игральные кости. Рассмотрим случайные события:

A_1 — на первой кости выпало четное число очков;

A_2 — на второй кости выпало нечетное число очков;

A_3 — сумма очков на кубиках нечетна.

Доказать, что каждые два из событий A_1 , A_2 , A_3 независимы, но события A_1 , A_2 , A_3 не являются независимыми в совокупности.

1.7.23. На плоскость бросают тетраэдр, три грани которого раскрашены соответственно в красный, желтый и голубой цвета, а четвертая — во все три цвета. События A , B и C состоят в том, что на плоскость выпадет грань соответственно красного, желтого, голубого цвета. Доказать, что каждые два события из событий A , B и C независимы, но A , B и C не являются независимыми в совокупности.

1.7.24. Пусть события A и B независимы и $A \subset B$. Доказать, что $P(A) = 0$ либо $P(B) = 1$.

1.7.25. Если событие A не зависит от самого себя, то $P(A) = 0$ либо $P(A) = 1$. Доказать это.

1.7.26. Доказать, что если событие A не зависит от $B \cap C$ и $B \cup C$, B не зависит от $A \cap C$, C не зависит от $A \cap B$ и $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ положительные, то A , B , C независимы в совокупности.

1.7.27. Если события A , B , C независимы в совокупности, то события A и $B \cup C$, а также A и $B \setminus C$ независимы. Доказать это.

1.7.28. Пусть A и B , A и C независимы и $B \supset C$ или $B \cap C = \emptyset$. Тогда события A и $B \setminus C$ либо A и $B \cup C$ независимы. Доказать это.

1.7.29. Пусть $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_r\}$ — множество r элементов, \mathfrak{A} — совокупность всех подмножеств Ω , $P(A) = \frac{d(A)}{r}$, где $d(A)$ — число элементов множества A . Доказать, что $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство. Описать все пары независимых событий A и B в пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, если r — простое число.

1.7.30. Предположим, что событие A независимо с каждым событием последовательности $\{B_k, k \geq 1\}$ таких событий, что $B_k \cap B_j = \emptyset$ при $k \neq j$. Доказать независимость событий A и $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

1.7.31. События A_1, \dots, A_n независимы в совокупности и $P(A_k) = p_k$. Какова вероятность того, что:

- а) не произойдет ни одно из событий A_1, \dots, A_n ;
- б) произойдет по крайней мере одно из событий A_1, \dots, A_n ;
- в) произойдет одно и только одно из событий A_1, \dots, A_n ?

1.7.32. При одном цикле осмотра радиолокационной станции, следящий за космическим объектом, объект будет обнаружен с вероятностью p . Обнаружение объекта в каждом цикле происходит независимо от других. Проведены n циклов осмотра. Какова вероятность того, что объект будет обнаружен?

1.7.33. Имеется m радиолокационных станций, каждая из которых за один цикл осмотра обнаруживает объект с вероятностью p (независимо от других циклов и других станций). За время T каждая станция успевает совершить n циклов. Найти вероятности таких событий: A — за время

T объект будет обнаружен, по крайней мере, одной из станций; B — за время T объект будет обнаружен каждой из станций.

1.7.34. Радиолокационная станция ведет наблюдение за k объектами. За время наблюдения i -й объект может быть потерян с вероятностью p_i . Найти вероятности таких событий: A — ни один объект не будет потерян; B — будет потерян по крайней мере один объект; C — будет потеряно не больше одного объекта.

1.7.35. По цели стреляют ракетами. Вероятность попадания каждой ракеты в цель равна p ; попадания отдельных ракет — независимые события. Каждая ракета, которая попала в цель, поражает ее с вероятностью p_1 . Стреляют до поражения цели или до использования всего боезапаса ракет. Имеется n ракет. Какова вероятность того, что: а) не весь боезапас будет использован? б) после поражения цели останется не меньше двух ракет? в) будет использовано не больше двух ракет?

1.7.36. (Задача де-Мере). Сколько раз нужно подбросить две игральные кости, чтобы вероятность по крайней мере одного появления шестерок была больше, чем $1/2$?

1.7.37. Пусть A_1 и A_2 — независимые события, p_i — вероятность того, что произойдет ровно i событий из событий A_1, A_2 ($i = 0, 1, 2$). Выразить вероятности p_0, p_1, p_2 через $P(A_1)$ и $P(A_2)$.

1.7.38. Пусть A_1, A_2, A_3 — независимые события, p_i — вероятность того, что произойдет ровно i из событий A_1, A_2, A_3 ($i = 0, 1, 2, 3$). Выразить вероятности p_1, p_2, p_3 через $P(A_1), P(A_2), P(A_3)$.

1.7.39. Электрическая цепь собрана по схеме, изображенной на рис. 4. Пусть A_i — событие, которое состоит в том, что за время T выйдет из строя i -й элемент цепи; $P(A_i) = p_i$. Разные элементы цепи выходят из строя независимо друг от друга. Пусть A — событие, состоящее в том, что цепь выйдет из строя за время T . Для каждой из схем а) — д) выразить событие A через событие A_i и вычислить вероятность A .

Замечание. В задачах 1.7.40—1.7.44 под надежностью прибора либо отдельных его блоков понимается вероятность безотказной работы на определенном фиксированном отрезке времени.

1.7.40. Прибор, состоящий из n блоков, выходит из строя, если выходит из строя по крайней мере один блок. Блоки

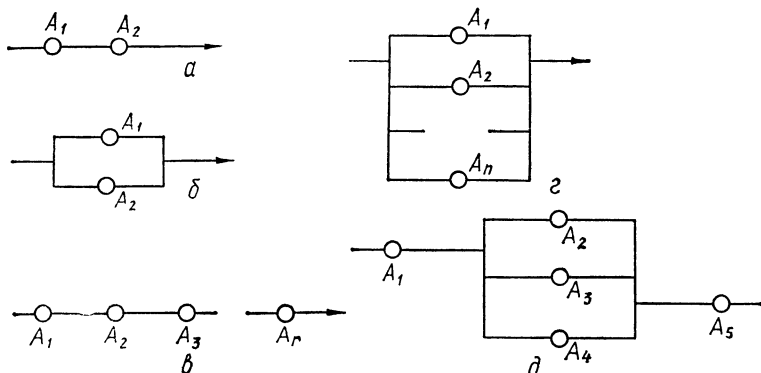


Рис. 4

выходят из строя независимо друг от друга. Надежность каждого блока равна p . Вычислить надежность прибора.

1.7.41. Для повышения надежности прибора он дублируется таким же прибором; надежность каждого прибора равна p . При выходе из строя первого прибора происходит мгновенное переключение на другой прибор. Найти надежность: а) этой системы приборов; б) системы, если прибор переключения работает с надежностью p_1 .

1.7.42. Для повышения надежности прибора он дублируется $n - 1$ другими такими же приборами; надежность каждого прибора равна p . а) Найти надежность этой системы приборов. Сколько нужно взять приборов, чтобы надежность системы была не меньше чем P ? б) Найти надежность системы приборов, если прибор, который включает дублирующее устройство, имеет надежность p_1 . Сколько нужно взять приборов, чтобы надежность была не меньше, чем P ?

1.7.43. Прибор состоит из трех узлов. Первый узел содержит n_1 элементов, другой — n_2 элементов, третий — n_3 элементов. Прибор выйдет из строя, если испортится первый узел; второй и третий узлы дублируют друг друга. Выход из строя элемента означает выход из строя того узла, в состав которого входит этот элемент. Надежность каждого элемента p . Элементы выходят из строя независимо друг от друга. Найти надежность прибора.

1.7.44. Технологическая система состоит из n блоков, надежность каждого из которых равна p . Выход из строя,

по крайней мере, одного блока приводит к выходу из строя всей системы. Для повышения надежности системы она дублируется n такими же блоками. Какой способ дублирования дает более высокую надежность:

а) дублирование каждого блока (рис. 5, а)?

б) дублирование всей системы (рис. 5, б)?

1.7.45. Игроки A и B играют в шахматы. За выигрыш партии засчитывается одно очко. Вероятность того, что партию выиграет игрок A , равна α , а игрок B — β ($\alpha > \beta$, $\alpha + \beta = 1$). Всю игру выиграет тот, кто опередит противника на 2 очка. а) Какова вероятность того, что игру выиграет A ? б) Какова вероятность того, что игру выиграет B ? в) Что выгоднее для A : играть одну партию или играть целую игру? г) Какова вероятность того, что игра никогда не окончится?

1.7.46. Решить задачу 45 при условии, что игру выиграет тот, кто подряд выиграет две партии.

1.7.47. Два игрока A и B по очереди стреляют по цели. Выигрывает тот, кто попадает первым. Вероятности попадания в цель для A и B равны соответственно p_1 и p_2 . Первым стреляет A . Вычислить вероятность выигрыша для каждого игрока. Какова вероятность того, что игра будет длиться бесконечно долго?

1.7.48. Два игрока по очереди бросают монету. Выигрывает тот, у которого раньше выпадет герб. Найти вероятность выигрыша для каждого из игроков.

1.7.49. В урне n белых и m черных шаров. Два игрока по очереди достают шары из урны, возвращая взятый шар в урну. Выигрывает тот, кто первым вытащит белый шар. Найти вероятность выигрыша для каждого игрока.

1.7.50. Среди N экзаменационных билетов есть n «счастливых». Студенты подходят за билетами друг за дру-

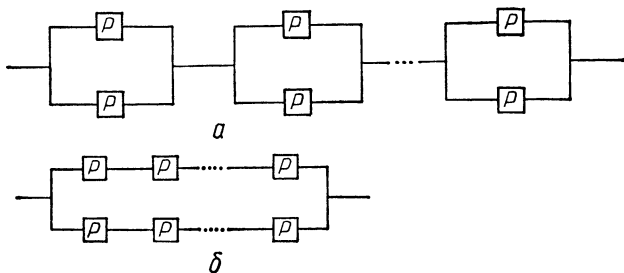


Рис. 5

гом. У кого больше вероятность взять «счастливый» билет: у того, кто подошел первым, или у того, кто подошел вторым?

1.7.51. В урне n шаров. Все возможные предположения о числе белых шаров в урне равновероятны. Наудачу из урны берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

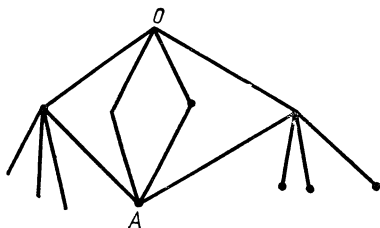


Рис. 6

1.7.52. В N урнах находится соответственно n_1, \dots, n_N шаров, из них белых m_1, \dots, m_N . Наудачу выбирают урну, а из нее — шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется белым?

1.7.53. Путешественник выходит из пункта O (рис. 6) и на каждом перекрестке выбирает наудачу один из возможных путей. Какова вероятность того, что путешественник попадет в пункт A ?

1.7.54. В двух урнах содержится соответственно n_1 и n_2 шаров, из них белых шаров m_1 и m_2 . Из первой урны переложили в другую один шар, цвет которого неизвестен. После этого из другой урны берут один шар. Какова вероятность того, что этот шар белый?

1.7.55. В урне находится один шар, о котором известно, что он либо белый, либо черный. В урну положили белый шар, а потом после тщательного перемешивания вынули наудачу один шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что после этого вынут из урны белый шар? (Льюис Керрол. История с узелками. М., Мир, 1973).

1.7.56. Радиолокационная станция ведет наблюдение за объектом, который может создавать помехи. Если объект не создает помехи, то за один цикл осмотра станция обнаруживает его с вероятностью p_0 , если создает — с вероятностью p_1 ($p_1 < p_0$). Вероятность того, что во время цикла осмотра будут созданы помехи, равна p и не зависит от того, как и когда создавались помехи в других циклах. Найти вероятность обнаружения объекта, по крайней мере, один раз за n циклов осмотра.

1.7.57. Прибор состоит из n блоков, которые дублируют друг друга, и может работать в одном из двух режимов—

благоприятствующем и неблагоприятствующем. В неблагоприятствующем режиме надежность работы каждого блока — p_1 , а в благоприятствующем — p_2 . Вероятность того, что прибор будет работать в благоприятствующем режиме равна p , в неблагоприятствующем — $1 - p$. Вычислить надежность прибора.

1.7.58. Пусть вероятность p_n того, что в семье n детей, равна αp^n при $n \geq 1$ и $p_0 = 1 - \alpha p (1 + p + p^2 + \dots)$. Предположим, что вероятность рождения мальчика и девочки одинаковы.

а) Доказать, что вероятность того, что в семье k мальчиков при $k \geq 1$ равна $2\alpha p^k / (2 - p)^k$. б) Пусть известно, что в семье есть, по крайней мере, один мальчик. Какова вероятность того, что в семье есть два или больше мальчиков?

1.7.59. Каждая из $N + 1$ урн содержит N шаров. Урна с номером k содержит k красных и $(N - k)$ белых шаров ($k = 0, 1, \dots, N$). Из наудачу выбранной урны n раз выбирают шар, причем выбранный шар каждый раз возвращают обратно. Вычислить: а) вероятность того, что все n шаров оказались красными; б) условную вероятность того, что и следующий $(n + 1)$ -й шар будет красным при условии, что все предыдущие шары были красными.

1.7.60. В урну, которая содержит n шаров, положили белый шар. Какова вероятность того, что вынутый из урны шар будет белым, если все предположения о начальном составе урны равновероятны?

1.7.61. Каждая из n урн содержит m белых и k черных шаров. Из первой урны взяли один шар и переложили во вторую, из второй урны взяли один шар и переложили в третью и т. д. Вычислить вероятность вытащить белый шар из последней урны.

1.7.62. Урна содержит n шаров. Все предположения о числе белых шаров в урне равновозможны. Наудачу выбранный из урны шар оказался белым. Вычислить вероятность всех предположений о составе шаров в урне. Какое предположение наиболее вероятно?

1.7.63. Из урны, которая содержит n шаров неизвестного цвета, взяли один шар, который оказался белым. После этого снова вытаскивают шар. Какова вероятность того, что этот шар белый? (Все предположения о начальном составе урны одинаково вероятны).

1.7.64. Каждая из k_1 урн содержит m_1 белых и n_1 черных шаров, а каждая из k_2 урн содержит m_2 белых и n_2 черных шаров. Из наудачу выбранной урны взяли шар, который оказался белым. Какова вероятность того, что шар извлечен из первой группы урн?

1.7.65. Стрелок A попадает в мишень с вероятностью $p_1 = 0,6$, стрелок B — с вероятностью $p_2 = 0,5$, а стрелок C — с вероятностью $p_3 = 0,4$. Стрелки сделали залп по мишени. Известно, что есть 2 попадания. Что более вероятно: попал C в мишень или нет?

1.7.66. Вероятность событий A, B, C равны соответственно p_1, p_2, p_3 . После проведения опыта оказалось, что два события произошли, а одно — нет. Доказать, что вероятность того, что событие C произошло, больше $\frac{1}{2}$, когда $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} - \frac{1}{p_3} > 1$.

1.7.67. На вход радиолокационного устройства попадают: с вероятностью p — сигнал с шумом и с вероятностью $(1 - p)$ — только шум. Если попадает сигнал с шумом, то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью p_1 , если попадает только шум, то устройство регистрирует наличие сигнала с вероятностью p_2 . Известно, что устройство зарегистрировало сигнал. Какова вероятность того, что сигнал попал на вход радиолокационного устройства?

1.7.68. Три охотника одновременно сделали по одному выстрелу в медведя. Медведя убили одной пулей. Какова вероятность того, что медведя убил первый, второй или третий охотник, если вероятности попадания для них равны соответственно $p_1 = 0,2$; $p_2 = 0,4$; $p_3 = 0,6$?

1.7.69. Из урны, которая содержит m белых ($m > 3$) и n черных шаров, потерял один шар. Для того, чтобы определить состав шаров в урне, из урны взяли два шара, которые оказались белыми. Вычислить вероятность того, что потерянный шар — белый.

1.7.70. Из урны, которая содержит 3 белых и 2 черных шара, переложили два шара в урну, которая содержит 4 белых и 4 черных шара. Какова вероятность теперь вынуть белый шар из второй урны?

1.7.71. Детали изготавливаются на двух заводах. Объем продукции второго завода в n раз превышает объем продукции первого завода. Доля брака на первом заводе — p_1 , на втором — p_2 . Наудачу выбранная деталь оказа-

лась бракованной. Какова вероятность того, что она выпущена на втором заводе?

1.7.72. Две урны содержат одно и то же количество шаров, несколько черных и несколько белых каждая. Из них вынимаются n ($n \geq 3$) шаров с возвращением. Найти число n и содержимое обеих урн, если вероятность того, что все белые шары взяты из первой урны, равна вероятности того, что из второй урны взяты либо все белые, либо все черные шары. (Теоретико-вероятностная формулировка великой теоремы Ферма).

1.7.73. Рассмотрим последовательность независимых экспериментов, каждый из которых состоит в бросании правильной игральной кости. Найти вероятность того, что три последовательные шестерки выпадут раньше, чем две последовательные единицы.

1.7.74. Рассмотрим последовательность независимых экспериментов, в каждом из которых некоторое событие — «успех» происходит с вероятностью p , а противоположное событие — «неудача» — с вероятностью $q = 1 - p$. Найти вероятность того, что a последовательных «успехов» произойдет раньше, чем b последовательных «неудач».

1.7.75. Рассмотрим квадратное уравнение $Ax^2 + Bx + C = 0$, где A, B, C определяются соответственно как результаты трех последовательных бросаний игральной кости. Найти вероятность того, что: а) уравнение имеет действительные корни; б) уравнение имеет рациональные корни.

1.7.76. Береговая артиллерия замечает вражеский крейсер на расстоянии 1 км от берега и начинает его обстреливать, делая каждую минуту один выстрел. После первого выстрела крейсер начинает уходить со скоростью 60 км/час. Пусть вероятность попадания в крейсер обратно пропорциональна квадрату расстояния от береговой пушки, а именно: если крейсер находится на расстоянии x , то вероятность попадания равна $0,75x^{-2}$. Вероятность того, что при n попаданиях крейсер не утонет, равна $\left(\frac{1}{4}\right)^n$. Вычислить вероятность того, что крейсеру удастся уйти.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

§ 1. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Дискретная случайная величина. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство. *Дискретной случайной величиной* называется функция $\xi(\omega)$ на Ω , принимающая конечное или счетное множество значений $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ и измеримая относительно σ -алгебры \mathfrak{A} . Это означает, что для каждого x_i

$$\{\omega: \xi(\omega) = x_i\} \in \mathfrak{A}$$

и поэтому имеет смысл вероятность $P\{\xi(\omega) = x_i\} = p_i$.

Распределение дискретной случайной величины. Пусть $\xi(\omega)$ — дискретная случайная величина, принимающая значения x_1, \dots, x_i, \dots . Набор чисел $P\{\omega: \xi(\omega) = x_i\} = p_i$ ($i = 1, 2, \dots$) называют *распределением случайной величины* ξ . Понятно, что $p_i \geq 0$, $\sum_i p_i = 1$.

Часто распределение случайной величины представляют в виде такой таблицы, в которой перечисляются значения случайной величины вместе с соответствующими вероятностями:

| | | | | |
|-------|-------|-----|-------|-----|
| ξ | x_1 | ... | x_i | ... |
| P | p_1 | ... | p_i | ... |

Функция распределения случайной величины $\xi(\omega)$ определяется равенством

$$P\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \sum_{i, x_i < x} p_i.$$

Математическое ожидание случайной величины. Пусть $\xi(\omega)$ — дискретная случайная величина, принимающая значения x_i с вероятностями p_i ($i = 1, 2, \dots$). Предположим, что ряд $\sum |x_i| p_i$ сходится. Тогда *математическим ожиданием* случайной величины $\xi(\omega)$ называется сумма ряда

$$M\xi(\omega) = \sum_i x_i p_i.$$

Если $\sum |x_i| p_i = +\infty$, то говорят, что случайная величина $\xi(\omega)$ не имеет математического ожидания. Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий. Дисперсия случайной величины $\xi(\omega)$ определяется равенством

$$D\xi = M[\xi - M\xi]^2 = \sum_i (x_i - M\xi)^2 p_i.$$

Совместное распределение случайных величин $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$. Пусть $\xi(\omega)$ — дискретная случайная величина, которая принимает значения $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$, $\eta(\omega)$ — дискретная случайная величина, принимающая значения $y_1, y_2, \dots, y_j, \dots$. Набор чисел

$$P\{\omega: \xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} = p_{ij},$$

($i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots$) называется совместным распределением случайных величин ξ и η (распределением случайного вектора (ξ, η)).

Имеют место также утверждения:

$$a) p_{ij} \geq 0, \quad \sum_i \sum_j p_{ij} = 1,$$

$$b) \sum_j p_{ij} = p_i, \quad \sum_i p_{ij} = q_j,$$

где $\{p_i\}$ — распределение $\xi(\omega)$, $\{q_j\}$ — распределение $\eta(\omega)$.

Независимые случайные величины. Случайные величины ξ и η называются независимыми, если для любых i и j

$$P\{\xi(\omega) = x_i, \eta(\omega) = y_j\} = P\{\xi(\omega) = x_i\} P\{\eta(\omega) = y_j\}.$$

Коэффициент корреляции. Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называется

$$r(\xi, \eta) = \frac{M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta)}{\sqrt{D\xi} \sqrt{D\eta}}.$$

Имеют место такие утверждения:

$$a) |r(\xi, \eta)| \leq 1;$$

$$b) \text{ если } \xi \text{ и } \eta \text{ независимы, то } r(\xi, \eta) = 0;$$

в) если $|r(\xi, \eta)| = 1$, то с вероятностью 1 $\eta = a\xi + b$, где a и b — некоторые постоянные.

Коэффициент ковариации случайных величин ξ и η — это

$$\text{cov}(\xi, \eta) = M(\xi - M\xi)(\eta - M\eta).$$

Биномиальное распределение. Проводятся независимые испытания; в каждом испытании может быть два результата: «успех» — с вероятностью p , либо «неудача» — с вероятностью $1 - p = q$. Пусть проведены n испытаний. Обозначим через ξ число «успехов», тогда

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

Распределение случайной величины ξ называется биномиальным распределением или распределением Бернулли (описанная выше схема называется схемой независимых испытаний, или схемой Бернулли).

Геометрическое распределение. Случайная величина ξ , принимающая значения $0, 1, \dots, k, \dots$ имеет геометрическое распределение с параметром p , если

$$P\{\xi = k\} = (1 - p)^k p.$$

Величину ξ можно интерпретировать как число испытаний до первого появления успеха в схеме независимых испытаний с вероятностью появления успеха p .

Распределение Пуассона. Случайная величина ξ , которая принимает значения $0, 1, \dots, k, \dots$ имеет распределение Пуассона с параметром λ , если

$$P\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Полиномиальное распределение. Проводятся независимые испытания, в каждом из которых может быть r результатов: E_1 — с вероятностью p_1 ; E_2 — с вероятностью p_2, \dots, E_r — с вероятностью p_r . Проведены n испытаний. Пусть v_i — число появлений E_i . Тогда вектор (v_1, \dots, v_r) имеет так называемое полиномиальное распределение

$$P\{v_1 = m_1, \dots, v_r = m_r\} = \frac{n!}{m_1! \dots m_r!} p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}$$

($m_1 + m_2 + \dots + m_r = n$).

II.1.1. Дважды бросают монету. Описать пространство элементарных событий Ω . Пусть $\xi(\omega)$ — число появлений герба. Найти распределение случайной величины ξ , математическое ожидание $M\xi$ и дисперсию $D\xi$.

II.1.2. Дважды бросают игральную кость. Описать пространство элементарных событий Ω . Пусть $\xi(\omega)$ — сумма полученных таким образом очков. Найти распределение случайной величины $\xi(\omega)$ и $M\xi$.

II.1.3. Монету подбрасывают до тех пор, пока выпадет герб. Описать пространство элементарных событий Ω . Пусть $\xi(\omega)$ — число бросаний. Вычислить: а) распределение случайной величины ξ ; б) $P\{\xi > 1\}$, $P\{\xi \leq n\}$.

II.1.4. Стреляют по цели до первого попадания. Попадания при разных выстрелах — независимые события, вероятность попадания при каждом выстреле — p . Описать пространство элементарных событий Ω . Пусть $\xi(\omega)$ — число сделанных выстрелов. Вычислить распределение случайной величины $\xi(\omega)$.

II.1.5. Какие из приведенных ниже последовательностей являются распределениями некоторой дискретной случайной величины:

$$\begin{aligned} \text{а) } p^k q^2, \quad q = 1 - p, \quad 0 < p \leq 1, \quad k = 1, 2, \dots; \\ \text{б) } p^{k-n} q, \quad q = 1 - p, \quad 0 \leq p \leq 1, \quad n > 0, \quad k = n, \\ n + 1, \dots; \end{aligned}$$

$$\text{в) } \frac{1}{k(k+1)};$$

$$\text{г) } \int_k^{k+1} f(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, \quad \text{где } \int_0^{\infty} f(x) dx = 1;$$

$$\text{д) } \frac{2^k}{k!} e^{-2};$$

II.1.6. Пусть ξ — случайная величина, принимающая значения $0, \pm 1, \dots, \pm n$ с вероятностями $P\{\xi = i\} = \frac{1}{2n+1}$. Вычислить $M\xi$, $D\xi$.

II.1.7. Случайная величина ξ имеет распределение

| | | |
|-------|---------------|---------------|
| ξ | 1 | -1 |
| P | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Вычислить $M\xi^n$, $Me^{it\xi}$.

II.1.8. Случайная величина ξ имеет распределение

| | | | |
|-------|---------------|---------------|---------------|
| ξ | -1 | 0 | 1 |
| p_i | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

Найти: а) распределение случайной величины $\eta = |\xi|$;

б) $M\eta$, $D\eta$.

II.1.9. Случайная величина ξ имеет распределение

| | | | | |
|-------|-----|-----|-----|-----|
| x_i | -1 | 0 | 1 | 2 |
| p_i | 0,2 | 0,1 | 0,3 | 0,4 |

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $\eta = 2\xi$.

П.1.10. Пусть ξ — случайная величина, имеющая распределение

| | | |
|-------|---------------|---------------|
| ξ | 1 | -1 |
| P | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |

Найти распределение случайной величины $\eta = \sin \xi \pi$.

П.1.11. Случайная величина ξ имеет распределение

| | | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| ξ | -1 | -0,5 | -0,1 | 0 | 0,1 | 0,2 | 0,5 | 1,0 | 1,5 | 2,0 |
| P | 0,005 | 0,012 | 0,074 | 0,102 | 0,148 | 0,231 | 0,171 | 0,160 | 0,081 | 0,016 |

Вычислить: а) математическое ожидание и дисперсию ξ ;

б) $P\left\{|\xi| \leq \frac{1}{2}\right\}$.

П.1.12. Пусть случайная величина ξ принимает конечное число неотрицательных значений x_1, \dots, x_r . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_{\xi}^{n+1}}{M_{\xi}^n} = \max_{1 \leq i \leq r} x_i;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_{\xi}^n} = \max_{1 \leq i \leq r} x_i.$$

П.1.13. Пусть ξ — случайная величина, которая принимает целые неотрицательные значения, причем, $M\xi < +\infty$. Доказать, что

$$M\xi = \sum_{i=1}^{\infty} P\{\xi \geq i\}.$$

П.1.14. Бросают две игральные кости. Описать пространство элементарных событий. Пусть $\xi(\omega)$ — число появлений шестерки на первой кости, $\eta(\omega)$ — число появлений шестерки на второй кости. Найти совместное распределение $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$. Доказать, что величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы.

П.1.15. Бросают две игральные кости. Описать пространство элементарных событий Ω . Пусть $\xi(\omega)$ — число

очков на первой кости, $\eta(\omega)$ — число очков на второй кости. Найти совместное распределение $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$. Доказать, что величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы.

II.1.16. Бросают две игральные кости. Пусть ξ — число очков на первой кости, а η — максимальное из двух очков. а) Найти совместное распределение ξ и η ; б) Вычислить $M\xi$, $M\eta$, $D\xi$, $D\eta$ и ковариацию ξ и η .

II.1.17. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — случайные величины, которые имеют конечные дисперсии и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Доказать, что:

$$\text{а) } DS_n = \sum_{k=1}^n D\xi_k + 2 \sum_{i < j} \text{cov}(\xi_i, \xi_j);$$

б) если ξ_1, \dots, ξ_n попарно независимы, то

$$DS_n = \sum_{k=1}^n D\xi_k.$$

II.1.18. Пусть γ_1, γ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины и $\xi = \gamma_1 + \gamma_2$, $\eta = \gamma_1 - \gamma_2$. Доказать, что $r(\xi, \eta) = 0$.

II.1.19. Пусть ξ и η — соответственно сумма и разность очков, которые появились при бросании двух игральных костей. Доказать, что $r(\xi, \eta) = 0$. Доказать, что величины ξ и η зависимы.

II.1.20. Пусть ξ принимает значения $\pm 1, \pm 2$, каждое с вероятностью $\frac{1}{4}$, а $\eta = \xi^2$. а) Найти совместное распределение ξ и η ; б) доказать, что $r(\xi, \eta) = 0$; в) доказать, что ξ и η — зависимы.

II.1.21. Если случайные величины ξ и η принимают только по два значения каждая и если $r(\xi, \eta) = 0$, то ξ и η — независимы. Доказать это.

II.1.22. Пусть ξ и η — дискретные случайные величины, которые принимают конечное число значений; возможными значениями ξ являются x_i ($i = 1, \dots, m$), возможными значениями η являются y_j ($j = 1, \dots, n$). Предположим, что величины ξ^h и η^k при $h = 1, \dots, m-1$; $k = 1, \dots, n-1$ некоррелированы, т. е.

$$M\xi^h\eta^k = M\xi^h M\eta^k.$$

Доказать, что ξ и η независимы.

II.1.23. Написаны n писем, но адреса на конвертах написаны в случайном порядке. Пусть ξ_n — число писем,

которые будут получены теми адресатами, кому они предназначены. Вычислить $M\xi_n$ и $D\xi_n$.

II.1.24. Пусть ξ и η — дискретные независимые случайные величины, которые принимают значения x_1, \dots, x_n, \dots с вероятностями

$$P\{\xi = x_n\} = a_n, \quad P\{\eta = x_n\} = b_n.$$

Вычислить $P\{\xi = \eta\}$.

II.1.25. Пусть ξ и η — независимые неотрицательные случайные величины, которые принимают целые значения, причем $M\xi < +\infty$. Доказать, что

$$M \min(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{\infty} P\{\xi \geq i\} P\{\eta \geq i\}.$$

II.1.26. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, которые принимают значения $0, 1, \dots, n$, причем

$$P\{\xi = i\} = P\{\eta = i\} = \frac{1}{n+1}.$$

Найти распределение случайной величины $\gamma = \xi + \eta$.

II.1.27. Проводятся независимые испытания. В каждом испытании может быть два результата: успех либо неудача. Вероятность появления успеха в k -м испытании равна p_k , неудачи — $q_k = 1 - p_k$. Пусть ξ_n — число успехов при n испытаниях. а) Вычислить $M\xi_n$, $D\xi_n$. (Схема Бернулли с переменными вероятностями успеха).

б) Доказать, что максимум $D\xi_n$ для некоторого задан-

ного значения $a = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n p_k$ ($0 < a < 1$) достигается при ус-

ловии $p_1 = p_2 = \dots = p_n = a$.

в) Вычислить

$$M\left(\xi_n - \sum_{k=1}^n p_k\right)^3 \text{ и } M\left(\xi_n - \sum_{k=1}^n p_k\right)^4.$$

II.1.28. Пусть ξ_n — число успехов в схеме Бернулли при испытаниях. Вычислить $M\xi_n$, $D\xi_n$, $M|\xi_n - np|$.

II.1.29. Пусть ξ — случайная величина, имеющая биномиальное распределение с параметрами n и p . Известно, что $M\xi = 12$, $D\xi = 4$. Найти n и p .

II.1.30. Пусть m_0 — наиболее вероятное число успехов в схеме Бернулли с вероятностью успеха p при n испытаниях, т. е. такое значение m , для которого вероятность $p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ максимальна. Доказать, что $np - q \leq m_0 \leq np + p$.

II.1.31. Стреляют по цели n раз. Попадания при отдельных выстрелах — независимые события, и вероятность попадания при каждом выстреле равна p . Пусть ξ — число попаданий при n выстрелах. Найти: а) распределение ξ ; б) $M\xi$, $D\xi$; в) наиболее вероятное число попаданий, если $p = 0,6$; $n = 20$.

II.1.32. Игральную кость бросают 5 раз. Найти вероятность того, что дважды появится число очков, кратное 3.

II.1.33. Сделано 20 выстрелов по цели. Вероятность попадания при одном выстреле 0,7. Вычислить: а) вероятность того, что будет, по крайней мере, одно попадание; б) вероятность того, что будет не больше двух попаданий; в) наиболее вероятное число попаданий; г) математическое ожидание и дисперсию числа попаданий.

II.1.34. Батарея сделала 14 выстрелов по объекту, вероятность попадания в который равна 0,2. Вычислить: а) наиболее вероятное число попаданий и его вероятность; б) вероятность уничтожения объекта, если для его уничтожения нужно не меньше 4 попаданий.

II.1.35. Найти вероятность: а) появления, по крайней мере, одной шестерки при подбрасывании 6 игральных костей; б) появления, по крайней мере, двух шестерок при подбрасывании 12 игральных костей; в) появления, по крайней мере, трех шестерок при подбрасывании 18 игральных костей.

II.1.36. Игральную кость бросают n раз. Пусть ξ — число появления шестерки. Вычислить: а) распределение ξ ; б) $M\xi$.

II.1.37. а) Какова вероятность попасть в цель не менее двух раз, если вероятность попадания равна $1/5$ и произведено 10 независимых выстрелов? б) Найти вероятность, по крайней мере, двух попаданий при условии, что одно попадание произошло.

II.1.38. Двое бросают монету n раз каждый. Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое количество гербов.

II.1.39. (Задача Банаха). Некий математик носит с собой две коробки спичек. Каждый раз, когда ему нужна спичка, он наудачу берет одну коробку. Когда-нибудь наступит такой момент, что вынутая коробка окажется пустой.

а) Найти вероятность того, что вторая коробка содержит r спичек, предполагая, что сначала каждая из коробок содержала по $N \geq r$ спичек.

б) Найти вероятность того, что в момент, когда впервые одна из коробок оказалась пустой, другая содержала r спичек.

в) Найти вероятность того, что отсутствие спичек будет впервые обнаружено не в той коробке, которая опустела первой.

II.1.40. Что более вероятно: выиграть у игрока (равного по силе игры) 4 партии из 8, или 3 партии из 5?

II.1.41. Найти условную вероятность того, что в первых n испытаниях Бернулли герб выпал при k -м испытании, если известно, что при n испытаниях герб выпал только один раз.

II.1.42. Пусть ξ_n — число успехов при n испытаниях Бернулли и

$$\eta = \begin{cases} 1, & \xi_n \text{ — четное число,} \\ 0, & \xi_n \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Вычислить $M\eta$.

II.1.43. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — последовательность независимых случайных величин, принимающая значения 0 и 1, причем

$$P\{\xi_i = 1\} = p, \quad P\{\xi_i = 0\} = 1 - p.$$

Положим: $\eta_i = 0$, если $\xi_i + \xi_{i+1}$ — четное число, $\eta_i = 1$, если $\xi_i + \xi_{i+1} = 1$ и $\gamma = \sum_{i=1}^n \eta_i$. Вычислить $M\gamma$, $D\gamma$.

II.1.44. Найти вероятность того, что число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли делятся на r .

II.1.45. Пусть ξ — случайная величина, которая имеет геометрическое распределение с параметром p . Доказать, что $M\xi = \frac{q}{p}$, $D\xi = \frac{q}{p^2}$.

II.1.46. Игральную кость бросают до первого появления шестерки. Пусть ξ — число бросаний. а) Найти распределение случайной величины ξ ; б) вычислить среднее

значение и дисперсию случайной величины ξ ; в) какова вероятность того, что будет сделано не более трех бросаний?

II.1.47. а) Доказать, что случайная величина ξ , принимающая значения $0, 1, 2, \dots$, имеет геометрическое распределение тогда и только тогда, когда имеет место такое свойство:

$$P\{\xi = k + r/\xi \geq k\} = P\{\xi = r\} \quad (r \geq 0)$$

(характеристическое свойство геометрического распределения).

б) Длительность междугороднего телефонного разговора измеряется минутами и является случайной величиной с геометрическим распределением. Какова вероятность того, что разговор будет длиться еще 3 минуты, если до этого он продолжался 10 минут. (Параметр геометрического распределения равен p).

II.1.48. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 — независимы и имеют одно и то же геометрическое распределение $\{q^k p, k = 0, 1, \dots\}$. Доказать, что

$$P\{\xi_1 = k/\xi_1 + \xi_2 = n\} = \frac{1}{n+1} \\ (k = 0, 1, \dots, p).$$

Справедливо ли обратное утверждение?

II.1.49. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют одно и то же геометрическое распределение $\{q^k p, k = 0, 1, \dots\}$. Пусть $\eta = \max(\xi_1, \xi_2)$. Найдите распределение величины η и совместное распределение величин η и ξ_1 .

II.1.50. Пусть ξ — число испытаний в схеме Бернулли (с вероятностью успеха p), которые нужно провести до r -го успеха. Доказать, что

$$P\{\xi = n\} = C_n^{r-1} p^r q^{n-r+1} \quad (n \geq r).$$

Замечание. Распределение величины ξ называется *отрицательно биномиальным распределением с параметрами* (r, p) ; при $r = 1$ получаем геометрическое распределение.

II.1.51. Пусть случайная величина ξ имеет отрицательно биномиальное распределение с параметрами (r, p) . Доказать, что

$$M\xi = r \frac{q}{p}, \quad D\xi = r \frac{q}{p^2}.$$

II.1.52. Стреляют по цели до r -го попадания. Вероятность попадания при одном выстреле равна p . Пусть ξ — число сделанных выстрелов. Найти распределение величины ξ . Вычислить $M\xi$, $D\xi$.

II.1.53. Игральную кость бросают до r -го появления шестерки. Найти математическое ожидание числа бросаний.

II.1.54. Купоны в коробках перенумерованы цифрами от 1 до n . Для того, чтобы выиграть, нужно набрать полный комплект купонов с разными номерами. Из каждой коробки берут один купон. Найти математическое ожидание числа коробок, которые нужно испробовать, чтобы получить полный комплект.

II.1.55. Пусть ξ — длина серии (успехов или неудач) в последовательности испытаний Бернулли, начавшейся при первом испытании.

а) Найти распределение ξ , $M\xi$, $D\xi$.

б) Пусть η — длина второй серии. Найти распределение η , $M\eta$, $D\eta$ и совместное распределение ξ и η .

II.1.56. Пусть ξ — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ . Доказать, что $M\xi = \lambda$, $D\xi = \lambda$.

II.1.57. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно.

а) Доказать, что случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

б) Доказать, что условное распределение величины ξ_1 при условии, что $\xi_1 + \xi_2 = n$, является биномиальным распределением с параметрами n и $p = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$, т. е.

$$P\{\xi_1 = k | \xi_1 + \xi_2 = n\} = C_n^k \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^k \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \right)^{n-k}$$

$$(k = 0, 1, \dots, n).$$

II.1.58. Случайная величина ξ имеет распределение Пуассона с параметром λ . Вычислить $M \frac{1}{1 + \xi}$.

II.1.59. Пусть η — случайная величина, принимающая неотрицательные целые значения. Каждый из η шаров кладут либо в урну A (с вероятностью p), либо в урну B (с вероятностью $q = 1 - p$).

Пусть η_A — число шаров в урне A , η_B — число шаров в урне B . Доказать, что случайные величины η_A и η_B независимы тогда и только тогда, когда η имеет распределение Пуассона.

II.1.60. Случайные величины ξ и η независимы и имеют распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что

$$P\{\xi - \eta = k\} = e^{-\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k} I_{|k|}(2\sqrt{\lambda_1\lambda_2}),$$

где

$$I_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$

($I_m(x)$ — бесселева функция второго рода).

II.1.61. Случайная величина ξ принимает целые неотрицательные значения с вероятностями

$$P\{\xi = n\} = \frac{a^n}{(1+a)^{n+1}},$$

где $a > 0$ (распределение Паскаля). Вычислить математическое ожидание и дисперсию ξ .

II.1.62. Урна содержит N шаров, обозначенных номерами от 1 до N . Последовательно вынимают n шаров, каждый раз возвращая шар обратно. Пусть ξ — наибольший номер, который был получен при этом. Найти распределение ξ и математическое ожидание ξ .

II.1.63. Игральную кость бросают n раз. Вычислить: а) вероятность того, что n_1 раз выпадет единица, n_2 раз — двойка, ..., n_6 раз — шестерка, б) вероятность того, что ни разу не выпадет шестерка.

II.1.64. В окружность вписан правильный треугольник.

а) Какова вероятность того, что точка, брошенная наудачу внутрь круга, попадет внутрь треугольника?

б) Внутри круга брошены наудачу 13 точек. Какова вероятность того, что в каждом из сегментов будет по 3 точки, а внутри треугольника — 4 точки?

II.1.65. Какова вероятность того, что при бросании 12 игральных костей каждая грань выпадет дважды?

II.1.66. Доказать, что для максимальной вероятности $p_n(k_1, \dots, k_r)$ полиномиального распределения выполняются неравенства

$$np_i - 1 < k_i \leq (n + r - 1)p_i \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

П.1.67. Объем V , который содержит N молекул газа, разделен на n ячеек. Вероятность попадания молекулы в любую из ячеек одинакова для всех молекул и всех ячеек и не зависит от распределения по ячейкам других молекул.

а) Какова вероятность того, что в первой ячейке есть m_1 молекул и т. д., в n -й ячейке — m_n молекул ($m_1 + m_2 + \dots + m_n = N$)?

б) Какова вероятность того, что в первой ячейке будет ровно l молекул?

в) Пусть $N = kn$, где k — целое число. Какое распределение молекул в ячейках наиболее вероятно?

П.1.68. Пусть вектор (v_1, \dots, v_r) имеет полиномиальное распределение, т. е.

$$P\{v_1 = m_1, \dots, v_r = m_r\} = \frac{n!}{m_1! \dots m_r!} p_1^{m_1} \dots p_r^{m_r}.$$

Доказать, что:

а) $Mv_i = np_i$, $Dv_i = \sqrt{np_i(1-p_i)}$;

б) $r(v_i, v_j) = -\sqrt{\frac{p_i p_j}{(1-p_i)(1-p_j)}} \quad (i \neq j)$

П.1.69. Найти коэффициент корреляции между числом появления единицы и числом появления шестерки при n бросаниях игральной кости.

П.1.70. В урне есть N шаров, среди которых n белых. Вынули m шаров ($m \leq n$). Описать пространство элементарных событий. Пусть $\xi(\omega)$ — число белых среди вынутых шаров. Найти: а) распределение случайной величины ξ (это распределение называется гипергеометрическим); б) $M\xi$, $D\xi$.

§ 2. ОБЩЕЕ ПОНЯТИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Пусть $(\Omega, \mathfrak{U}, p)$ — вероятностное пространство. *Случайной величиной* называется функция $\xi(\omega)$ на Ω , которая измерима относительно σ -алгебры \mathfrak{U} , т. е. такая функция, что при каждом действительном x

$$\{\omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{U}.$$

Функцией распределения случайной величины $\xi(\omega)$ называется функция

$$F(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\}.$$

II.2.1. Рассмотрим стохастический эксперимент: на отрезок $[0, T]$ наудачу бросают точку. Пусть ω — координата этой точки, $\Omega = \{\omega: 0 \leq \omega \leq T\}$, а \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств отрезка $[0, T]$, которые измеримы по Лебегу. Если $A \subset \mathfrak{A}$, то положим $P(A) = \frac{m(A)}{T}$, где $m(\cdot)$ — мера Лебега множества A .

а) Доказать, что $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство.

б) Доказать, что расстояние $\xi(\omega)$ от точки ω до точки 0 является случайной величиной, вычислить функцию распределения этой величины.

II.2.2. Рассмотрим стохастический эксперимент: точку P бросают наудачу в круг радиуса R с центром в начале координат. Пусть

$$\Omega = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq R^2\},$$

\mathfrak{A} есть σ -алгебра подмножеств Ω , измеримых по Лебегу. Если $A \in \mathfrak{A}$, то положим

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)},$$

где $m(\cdot)$ — мера Лебега на плоскости.

а) Доказать, что $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство.

б) Доказать, что расстояние от точки P до начала координат является случайной величиной.

в) Вычислить функцию распределения этой случайной величины.

II.2.3. Ω — квадрат на плоскости XOY с вершинами $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(1; 1)$; координаты точек квадрата обозначим (x, y) . В качестве \mathfrak{A} возьмем минимальную σ -алгебру, к которой принадлежат все множества, образованные точками многоугольников, которые лежат в квадрате. Вероятность множества, которое содержит точки многоугольника, есть площадь этого многоугольника. Отсюда следует, что вероятность множества, которое содержит точки фигуры, которые лежат в квадрате, равна площади этой фигуры. Найти функции распределения и плотности распределения случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$:

а) $\xi = x + y$;

б) $\xi = x - y$;

$$\text{в) } \xi = xy;$$

$$\text{г) } \xi = x^2 + y^2;$$

$$\text{д) } \xi = \frac{x}{y};$$

$$\text{е) } \xi = \min(x, y);$$

$$\text{ж) } \xi = \max(x, y);$$

$$\text{з) } \xi = |x - y|;$$

и) ξ — расстояние точки (x, y) от диагонали, которая соединяет точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$.

П.2.4. Пусть $\xi(\omega)$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, а $F(x)$ — функция распределения этой величины.

а) Доказать, что множества

$$\begin{aligned} &\{\omega : \xi(\omega) \leq x\}, \quad \{\omega : \xi(\omega) = x\}, \\ &\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\}, \quad \{\omega : a < \xi(\omega) < b\} \end{aligned}$$

являются случайными событиями.

б) Доказать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) \leq x\} &= F(x + 0), \\ \mathbf{P}\{\omega : \xi(\omega) = x\} &= F(x + 0) - F(x), \\ \mathbf{P}\{\omega : a \leq \xi(\omega) < b\} &= F(b) - F(a), \\ \mathbf{P}\{\omega : a < \xi(\omega) < b\} &= F(b) - F(a + 0). \end{aligned}$$

П.2.5. Пусть $\xi(\omega)$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ с функцией распределения $F(x)$.

а) Доказать, что при любом c множества

$$\{\omega : \xi(\omega) \geq c\}, \quad \{\omega : \xi(\omega) > c\}$$

являются случайными событиями.

б) Выразить вероятности этих событий через функцию распределения.

П.2.6. Пусть A — случайное событие. Доказать, что

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

является случайной величиной.

П.2.7. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$, где $\Omega = [0, 1]$, \mathfrak{A} является σ -алгеброй множеств, измеримых по Лебегу, $\mathbf{P}(A) = m(A)$, если $A \in \mathfrak{A}$ ($m(\cdot)$ — мера Лебега на $[0, 1]$).

Пусть E — подмножество $[0, 1]$, не измеримое по Лебегу, и

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in E, \\ -1, & \omega \notin E. \end{cases}$$

Является ли функция $\xi(\omega)$ случайной величиной на $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$?

II.2.8. Пусть $\xi(\omega)$ случайная величина. Доказать, что функции а) $\eta_1(\omega) = a\xi(\omega)$; б) $\eta_2(\omega) = |\xi(\omega)|$; в) $\eta_3(\omega) = \xi^2(\omega)$ также случайные величины.

II.2.9. Пусть $\eta(\omega) = \xi^2(\omega)$ — случайная величина. Можно ли утверждать, что: а) $\xi(\omega)$ — случайная величина; б) $|\xi(\omega)|$ является случайной величиной?

II.2.10. Пусть $\Omega = [0, 1]$, \mathfrak{A} — σ -алгебра множеств, измеримых по Лебегу; $P(\cdot)$ — мера Лебега на $[0, 1]$. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Пусть E — некоторое подмножество $[0, 1]$, не измеримое по Лебегу, положим

$$\xi(\omega) = \begin{cases} \omega, & \omega \in E, \\ -\omega, & \omega \notin E. \end{cases}$$

Является ли $\xi(\omega)$ случайной величиной?

II.2.11. Если $\xi(\omega)$ — случайная величина, то при каждом $c \in \{\omega : \xi(\omega) = c\}$ — случайное событие. Справедливо ли обратное утверждение?

II.2.12. Пусть $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ — случайные величины. Доказать, что

$$\begin{aligned} & \max \{ \xi_i(\omega), \quad 1 \leq i \leq n \}, \\ & \min \{ \xi_i(\omega), \quad 1 \leq i \leq n \} \end{aligned}$$

также случайные величины.

II.2.13. Пусть I — некоторое счетное множество и при каждом $\alpha \in I$ $\xi_\alpha(\omega)$ является случайной величиной. Доказать, что

$$\sup_{\alpha \in I} \xi_\alpha(\omega) \text{ и } \inf_{\alpha \in I} \xi_\alpha(\omega)$$

случайные величины. Справедливо ли это утверждение, если множество I не является счетным?

II.2.14. Доказать, что случайная величина ξ принимает значение x с положительной вероятностью тогда и только

тогда, когда функция распределения этой случайной величины имеет разрыв в точке x . Сформулировать условие дискретности случайной величины в терминах функции распределения.

II.2.15. Число x называется точкой роста функции распределения $F(x)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство

$$F(x + \varepsilon) - F(x - \varepsilon) > 0.$$

Построить пример дискретного распределения, для которого каждое действительное число является точкой роста.

II.2.16. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство; случайное событие $A \in \mathfrak{A}$ и $P(A) > 0$ называется атомом, если для каждого случайного события $B \in \mathfrak{A}$ из $B \subset A$ следует, что $P(B) = 0$ либо $P(B) = P(A)$. Доказать, что случайная величина $\xi(\omega)$ с вероятностью 1 постоянна на каждом атоме.

II.2.17. Пусть $\Omega = [0, 1]$, а \mathfrak{A} — σ -алгебра борелевских множеств Ω , $P(\cdot)$ — мера Лебега на $[0, 1]$. Доказать, что: а) $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство; б) каждая борелевская функция на $[0, 1]$ является случайной величиной на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

II.2.18. Пусть F_0 — класс подмножеств Ω такой, что класс конечных сумм множеств из F_0 , которые не пересекаются, является алгеброй множеств, и \mathfrak{K} — класс функций от ω , которые имеют такие свойства:

(1) если $A \in F_0$, то

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A; \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

принадлежит \mathfrak{K} ;

(II) если $\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ — функции из \mathfrak{K} , то и линейная комбинация этих функций также принадлежит \mathfrak{K} ;

(III) если $\xi_n(\omega) \in \mathfrak{K}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)$ при всех ω , то $\xi(\omega) \in \mathfrak{K}$. Пусть также $\mathfrak{B}(F_0)$ — минимальная σ -алгебра, которая содержит класс F_0 . Доказать, что \mathfrak{K} содержит все функции, измеримые относительно $\mathfrak{B}(F_0)$.

II.2.19. Пусть $\Omega = R^n$, F_0 — класс параллелепипедов $\{x: a_i \leq x_i < b_i, i = \overline{1, n}\}$. Доказать, что \mathfrak{K} содержит все борелевские функции.

П.2.20. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство, $\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)$ — случайные величины на этом пространстве, $f(x_1, \dots, x_n)$ — борелевская функция n переменных. Доказать, что $f(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ — случайная величина.

П.2.21. Пусть A — n -мерное борелевское множество. Доказать, что

$$\{\omega : [\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)] \in A\} \in \mathfrak{A}.$$

П.2.22. Пусть $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ — некоторая совокупность случайных величин. Минимальная σ -алгебра, которая содержит все множества вида $\{\omega : \xi_t(\omega) \in A\}$, где $t \in T$, а A — произвольное борелевское множество на числовой прямой, является минимальной σ -алгеброй, относительно которой измеримы все функции $\xi_t(\omega), t \in T$, и обозначается $\mathfrak{B}(\xi_t(\omega), t \in T)$. Доказать, что функция $\eta(\omega)$ измерима относительно $\mathfrak{B}(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega))$ тогда и только тогда, когда

$$\eta(\omega) = f(\xi_1(\omega), \dots, \xi_n(\omega)),$$

где $f(x_1, \dots, x_n)$ — некоторая борелевская функция.

П.2.23. Пусть $\{\xi_t(\omega), t \in T\}$ — некоторое множество случайных величин и $\mathfrak{B}_S = \mathfrak{B}\{\xi_t : t \in S\}$, где $S \subset T$, а T — несчетное множество. Доказать, что когда: а) $\Lambda \in \mathfrak{B}_T$, то существует счетное подмножество S множества T такое, что $\Lambda \in \mathfrak{B}_S$ и б) $\eta(\omega)$ — случайная величина, измеримая относительно \mathfrak{B}_T , то существует счетное множество S такое, что $\eta(\omega)$ измерима относительно \mathfrak{B}_S .

§ 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ И СЛУЧАЙНЫЕ ВЕКТОРЫ

Функция распределения случайной величины ξ — это вероятность

$$F(x) = P\{\xi \leq x\}.$$

Функция распределения $F(x)$: а) непрерывна слева; б) неубывающая на $(-\infty, +\infty)$; в) $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Для каждой функции $F(x)$, которая имеет эти свойства, можно построить вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и случайную величину $\xi(\omega)$ на нем, которая имеет функцию распределения $F(x)$.

Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ , то

$$P\{a \leq \xi < b\} = F(b) - F(a) \quad (a < b).$$

Плотность распределения случайной величины ξ . Если функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ можно представить в виде

$$F(x) = \int_{-\infty}^x p(u) du,$$

то говорят, что случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$. Почти при всех x выполняется равенство $F'(x) = p(x)$. Плотность распределения $p(x)$ — неотрицательная

функция и $\int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = 1$.

Имеет место равенство

$$P\{a \leq \xi < b\} = \int_a^b p(u) du.$$

Если $p(x)$ — непрерывная функция, то

$$P\{x \leq \xi < x + \Delta x\} = p(x) \Delta x + O(\Delta x).$$

Равномерное распределение. Случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, если плотность распределения ξ равна

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases}$$

Нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$. Случайная величина имеет нормальное $N(a, \sigma^2)$ распределение, если плотность распределения ξ равна

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right\}.$$

Показательное распределение. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ , если плотность распределения ξ равна

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Функция распределения случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) — это вероятность

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n\}.$$

Плотность распределения случайного вектора. Если функцию распределения $F(x_1, \dots, x_n)$ вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) можно представить в виде

$$F(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \dots \int_{-\infty}^{x_n} p(u_1, \dots, u_n) du_1 \dots du_n,$$

то говорят, что случайный вектор (ξ_1, \dots, ξ_n) имеет плотность распределения $p(x_1, \dots, x_n)$.

Плотность распределения $p(x_1, \dots, x_n)$ случайного вектора (ξ_1, \dots, ξ_n) является неотрицательной функцией и

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n = 1.$$

Если A — борелевское множество в R^n , а вектор (ξ_1, \dots, ξ_n) имеет плотность распределения $p(x_1, \dots, x_n)$, то

$$P\{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in A\} = \int_A \dots \int p(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Зная плотность распределения случайного вектора, можно найти плотность распределения каждой его компоненты. Например,

$$p_{\xi_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\xi_1, \xi_2)(x_1, x_2) dx_2.$$

Если плотность распределения $p(x_1, \dots, x_n)$ — непрерывная функция, то

$$P\{x_1 < \xi_1 < x_1 + \Delta x_1, \dots, x_n < \xi_n < x_n + \Delta x_n\} = p(x_1, \dots, x_n) \Delta x_1 \dots \Delta x_n + O(\Delta x_1 \dots \Delta x_n).$$

Независимые случайные величины. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы, если

$$P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n\} = P\{\xi_1 < x_1\} \dots P\{\xi_n < x_n\}.$$

Математическое ожидание случайной величины. Пусть $\xi(\omega)$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$. Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет математическое ожидание, если существует интеграл

$$M\xi(\omega) = \int_{\Omega} \xi(\omega) dP = M\xi.$$

Если $F(x)$ — функция распределения ξ , то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x);$$

если ξ имеет плотность распределения, то

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx.$$

Если $g(x)$ — борелевская функция и

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dF(x) < +\infty, \text{ то } Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x).$$

Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий.

Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий.

II.3.1. Какие из приведенных ниже функций являются функциями распределения:

а) $F(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg} x$;

б) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{[x]}{2}, & 0 < x \leq 2, \\ 1, & x > 2; \end{cases}$

в) $F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x}{1+x}, & x > 0; \end{cases}$

г) $F(x) = e^{-e^{-x}}$;

д) $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - \frac{1-e^{-x}}{x}, & x > 0. \end{cases}$

II.3.2. Плотность распределения случайной величины ξ равна $p(x) = ae^{-\lambda|x|}$ ($\lambda > 0$).

Вычислить: а) коэффициент a ; б) функцию распределения ξ ; в) $M\xi$, $D\xi$; г) построить графики плотности распределения и функции распределения.

II.3.3. Ниже приведены функции, которые зависят от определенных параметров. Определить те значения параметров, для которых эти функции будут плотностями распределений.

а) $t(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b], \end{cases} \quad (a < b);$

б) $f(x) = \begin{cases} k|x-a|, & c \leq x \leq d, \\ 0, & x \in [c, d]; \end{cases}$

в) $f(x) = \begin{cases} \frac{c}{ax+b}, & d \leq x < \infty, \\ 0, & x < d; \end{cases}$

$$\text{г) } f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & ax^2 + bx + c \geq 0, \\ 0, & ax^2 + bx + c < 0; \end{cases}$$

$$\text{д) } f(x) = \begin{cases} cx^\alpha e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0; \end{cases}$$

$$\text{е) } f(x) = ce^{\alpha(x-b)^2};$$

$$\text{ж) } f(x) = \frac{d}{a + bx + cx^2}.$$

II.3.4. Случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ (распределение Коши). Вычислить вероятности:

$$\text{а) } P\{\xi \geq 1\}; \text{ б) } P\{|\xi| \geq 1\}.$$

II.3.5. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = \frac{1}{3}$. Вычислить вероятности:

$$\text{а) } P\{\xi > 3\}; \text{ б) } P\{\xi > 6 \mid \xi > 3\}; \text{ в) } P\{\xi > t + 3 \mid \xi > t\}.$$

II.3.6. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ . Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = e^\xi$.

II.3.7. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ . Найти функцию распределения случайной величины $\eta = -\xi$.

II.3.8. Случайная величина ξ называется симметричной, если функции распределения случайных величин ξ и $-\xi$ совпадают. Сформулировать условие симметричности случайных величин: а) в терминах функции распределения; б) в терминах плотности распределения.

II.3.9. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ . Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \operatorname{sign} \xi$ и вычислить $M\eta$.

II.3.10. Случайная величина ξ имеет функцию распределения $F(x)$. Найти функцию распределения таких величин: а) $a\xi + b$, где a и b — произвольные действительные числа; б) ξ^2 ; в) $g(\xi)$, где $g(x)$ — монотонная функция; г) $|\xi|$; д) $\sin \xi$; е) $\operatorname{tg} \xi$.

II.3.11. Плотностью распределения величины ξ является $p(x)$. Найти плотность распределения таких величин:

а) $a\xi + b$ ($a \neq 0$); б) $|\xi|$; в) ξ^2 ; г) $g(\xi)$, где $g(x)$ — монотонная дифференцируемая функция; д) $\sin \xi$; е) $g(\xi)$,

если $g(x)$ — кусочно-монотонная дифференцируемая функция.

II.3.12. Пусть ξ — случайная величина, равномерно распределенная на $[-1, 1]$. Найти распределение случайной величины $\eta = |\xi|$.

II.3.13. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность распределения случайных величин: а) $\eta = \xi^2$; б) $\eta = \frac{1}{\xi}$; в) $\eta = e^\xi$ и построить их графики.

II.3.14. Плотность распределения случайной величины ξ равна $p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. Найти распределение случайной величины $\eta = \operatorname{arctg} \xi$.

II.3.15. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2]$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = |\xi - 1|$.

II.3.16. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 2]$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = |\xi|$.

II.3.17. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ . Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

II.3.18. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-2} e^{-1/2x^2} \quad (-\infty < x < \infty).$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$.

II.3.19. Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}.$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$.

II.3.20. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \sin \xi$.

II.3.21. Пусть ξ равномерно распределена на $[0, 4\pi]$. Найти функцию распределения и плотность распределения случайной величины $\eta = \sin \xi$.

II.3.22. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = |\sin \xi|$.

II.3.23. Случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = 1/\xi$.

II.3.24. Диаметр круга — случайная величина ξ , равномерно распределенная на отрезке $[a, b]$. Найти функцию распределения площади круга.

II.3.25. Пусть ξ — случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$ и $\eta = F(\xi)$. Вычислить функцию распределения η .

II.3.26. Пусть $F(x)$ — функция распределения, причем $F(0) = 0$. Доказать, что функция

$$G(x) = \begin{cases} F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right), & x \geq 1; \\ 0, & x < 1 \end{cases}$$

является функцией распределения.

II.3.27. Пусть $F(x)$ — функция распределения. Доказать, что функции

$$G_1(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} F(u) du,$$

$$G_2(x) = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} F(u) du$$

являются функциями распределения при любом $h > 0$.

II.3.28. Точка P равномерно распределена в круге радиуса R . Пусть η — расстояние от точки P до центра круга. Найти функцию распределения $F_\eta(x)$ и плотность распределения $P_\eta(x)$ случайной величины η . Построить графики функций $F_\eta(x)$ и $P_\eta(x)$. Вычислить $M\eta$, $D\eta$.

II.3.29. Пусть O — начало координат, P — случайная точка на оси Ox , а Q — точка с координатами $(0, 1)$. Известно, что угол OQP равномерно распределен на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Найти функцию распределения и плотность распределения для абсциссы точки P .

II.3.30. Точка A равномерно распределена на окружности единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть ξ — проекция точки A на ось Ox . Вычислить: а) функцию распределения ξ ; б) плотность распределения ξ ; в) $M\xi$; г) $P\left\{|\xi| \geq \frac{1}{2}\right\}$.

II.3.31. Колесо вагона единичного радиуса имеет трещину на внешнем крае. Пусть ξ — высота трещины над землей после случайной остановки вагона. Найти функцию распределения ξ .

II.3.32. На окружности радиуса R берут наудачу две точки с равномерным распределением. Найти функцию распределения расстояния γ между ними и вычислить $M\gamma$.

II.3.33. Точка P равномерно распределена на окружности радиуса R с центром в начале координат. Найти функцию распределения и плотность распределения длины γ отрезка касательной, проведенной в точке P до точки пересечения с осью Ox . Существует ли $M\gamma$?

II.3.34. На отрезок оси ординат с концами $(0, 0)$ и $(0, R)$ брошена наудачу точка (ордината этой точки равномерно распределена в интервале $(0, R)$). Через эту точку проведена хорда окружности $x^2 + y^2 = R^2$, перпендикулярная к оси Oy . Найти функцию распределения длины этой хорды.

II.3.35. Стержень длины l наудачу разломали на две части. Найти функцию распределения длины меньшей части.

II.3.36. На отрезок $[0, T]$ наудачу бросили две точки. Пусть γ — расстояние между ними. Найти функцию распределения γ и вычислить $M\gamma$, $D\gamma$, $M\gamma^n$.

II.3.37. Два человека договорились встретиться в промежутке времени $[0, T]$. Пусть γ — время, которое придется ждать одному из них до момента встречи. Найти функцию распределения γ и вычислить $M\gamma$.

II.3.38. На отрезке $[0, T]$ наудачу берут две точки с равномерным распределением. Эти точки разбивают

отрезок $[0, T]$ на три отрезка. Найти функцию распределения каждого из полученных трех отрезков.

II.3.39. На отрезке $[0, T]$ наудачу берут n точек с равномерным распределением. Эти точки разбивают $[0, T]$ на $n + 1$ отрезков. Доказать, что каждый отрезок имеет одну и ту же функцию распределения. Найти эту функцию распределения.

II.3.40. Пусть некоторый прибор начинает работать в нулевой момент времени, а в случайный момент времени ξ выходит из строя. Допустим, что условная вероятность того, что прибор выйдет из строя в промежутке времени $(x, x + \Delta x)$ при условии, что это не произошло до момента x , равна $\lambda \Delta x + o(\Delta x)$. Доказать, что при $x > 0$ справедливо равенство

$$P\{\xi < x\} = 1 - e^{-\lambda x},$$

т. е. случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ .

II.3.41. Пусть ξ — время безотказной работы некоторого прибора, который начинает работать в нулевой момент времени. Допустим, что условная вероятность того, что прибор выйдет из строя на интервале времени $(x, x + \Delta x)$, если он не выходил из строя до этого времени, равна $\lambda(x) \Delta x + o(\Delta x)$. Доказать, что функция распределения ξ имеет вид

$$F(x) = 1 - \exp \left\{ - \int_0^x \lambda(u) du \right\}.$$

II.3.42. Распределение Вейбулла. Доказать, что если в предыдущей задаче $\lambda(x) = cx^{\alpha-1}$ ($\alpha > 1$, $c > 0$), то функция распределения ξ имеет вид

$$F(x) = 1 - \exp \{-cx^\alpha\}.$$

II.3.43. Пусть ξ — случайная величина с показательным распределением, а $t > 0$ — фиксированное действительное число. Найти распределение $\xi - t$ при условии, что $\xi \geq t$.

II.3.44. Пусть $F(x)$ — функция распределения положительной случайной величины ξ , обладающая таким свойством:

$$P\{\xi < t + x/\xi > t\} = P\{\xi < x\}.$$

Доказать, что

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x > 0).$$

II.3.45. Пусть ξ имеет показательное распределение с параметром λ . Вычислить:

а) $M\xi^k$; б) $D\xi$; в) $P\{\xi \geq 1\}$.

II.3.46. Длительность работы электронной лампы является случайной величиной, имеющей показательное распределение с $\lambda = 0,003$. Через год лампу заменяют, даже если она и не вышла из строя. Найти математическое ожидание времени работы лампы.

II.3.47. Пусть ξ — случайная величина, равномерно распределенная на $(0, 1)$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = \ln \frac{1}{\xi}$. Вычислить $M\eta$.

II.3.48. Пусть ξ — равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина. Найти функцию распределения случайной величины $\eta = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - \xi)$.

II.3.49. Пусть ξ — случайная величина, показательное распределенная с параметром λ . Найти распределение случайной величины $\eta = [\xi]$. Вычислить $M\eta$.

II.3.50. Пусть ξ имеет нормальное распределение $N(0, 1)$. Найти распределение случайной величины $\eta = \frac{1}{\xi^2}$. Существует ли $M\eta$?

II.3.51. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение $N(0, \sigma^2)$. При каком σ вероятность попадания в интервал (a, b) будет максимальной?

II.3.52. Доказать следующие свойства функции распределения:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow +0} x \int_x^{\infty} \frac{1}{u} dF(u) = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{\infty} \frac{1}{u} dF(u) = 0;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow -0} x \int_{-\infty}^x \frac{1}{u} dF(u) = 0;$$

$$\text{г) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x \int_{-\infty}^x \frac{1}{u} dF(u) = 0.$$

II.3.53. Величина ξ имеет плотность распределения $f(x)$. Вычислить ее математическое ожидание:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{если } a \leq x \leq b, \\ 0, & \text{если } x < a \text{ или } x > b; \end{cases}$$

$$\text{б) } f(x) = \begin{cases} 1 - |x - 1|, & \text{если } x \in [0, 2], \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } x > 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } f(x) = \begin{cases} ke^{-k|x-a|}, & \text{если } x \geq a, \\ 0, & \text{если } x < a; \end{cases}$$

$$\text{г) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi b}} \exp \left\{ -\frac{(x-a)^2}{2b} \right\};$$

д) $f(x)$ — четная функция.

II.3.54. Найти $D\xi$, если ξ имеет плотность $f(x)$, которая определяется формулами а), б), в), г) задачи II.3.53.

II.3.55. Пусть ξ — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[-a, a]$. Вычислить:

$$\text{а) } M\xi; \text{ б) } D\xi; \text{ в) } P \left\{ |\xi| > \frac{a}{2} \right\}.$$

II.3.56. Случайная величина ξ равномерно распределена на $[0, 1]$. Вычислить:

$$\text{а) } M \sin^2 \pi \xi; \text{ б) } Me^{\xi}.$$

II.3.57. Пусть $F(x)$ — непрерывная функция распределения. Доказать, что:

$$\text{а) } \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dF(x) = \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \int_{-\infty}^{+\infty} F^k(x) dG(x) = \frac{n}{n+k},$$

где $G(x) = F^n(x)$.

II.3.58. а) Найти $M|\xi|$, если случайная величина ξ распределена нормально с параметрами $(0, \sigma^2)$.

б) Пусть ξ — нормально распределена с параметрами $(0, \sigma^2)$. Вычислить $M|\xi - a|$.

II.3.59. Пусть ξ — случайная величина с плотностью распределения $p_{\xi}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$. Вычислить $M \min(|\xi|, 1)$.

II.3.60. В текстильном деле неодинаковостью хлопка по длине называется величина

$$t = \frac{a'' - a'}{2a},$$

где a — средняя длина волокна; a'' — математическое ожидание длин волокон, больших средней длины; a' — математическое ожидание длин волокон, меньших средней длины. Предполагая, что длина волокна имеет нормальное распределение $N(a, \sigma^2)$, выразить t через a и σ^2 .

II.3.61. Пусть ξ — случайная величина, возможные значения которой находятся в промежутке $[a, b]$. Доказать, что $a \leq M\xi \leq b$, $D\xi \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

II.3.62. Доказать, что математическое ожидание величины ξ конечно тогда и только тогда, когда ряд $\sum_{n=0}^{\infty} P\{|\xi| \geq n\}$ сходится.

II.3.63. Доказать, что если $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ и существует $M\xi$, то имеют место соотношения:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - F(x)) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0.$$

II.3.64. Доказать, что если существует $M\xi$, то имеет место равенство

$$\begin{aligned} M\xi &= \int_0^{\infty} (1 - F(y)) dy - \int_{-\infty}^0 F(y) dy = \\ &= \int_0^{\infty} (1 - F(+y) + F(-y)) dy, \end{aligned}$$

и, наоборот, из существования интегралов в правой части следует существование $M\xi$.

II.3.65. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$, имеющая математическое ожидание. Доказать, что

$$M|\xi| = \int_{-\infty}^0 F(x) dx + \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx.$$

II.3.66. Если $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ и существует $M\xi^2$, то

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(1 - F(x) + F(-x)) = 0$$

и

$$M\xi^2 = 2 \int_0^{\infty} x(1 - F(x) + F(-x)) dx.$$

II.3.67. Пусть $F(x)$ — функция распределения. Доказать, что для любого $s > 0$

$$\int_0^{\infty} x^s dF(x) = s \int_0^{\infty} x^{s-1} [1 - F(x)] dx,$$

причем из сходимости одного из этих интегралов вытекает сходимость другого.

II.3.68. Пусть $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ . Доказать, что $M|\xi|^s$ ($s > 0$) существует тогда и только тогда, когда функция $|x|^{s-1}(1 - F(x) + F(-x))$ интегрируема на $(-\infty, \infty)$.

II.3.69. На сфере радиуса R берут наудачу две точки A и B . Найти функцию распределения и математическое ожидание длины хорды AB .

II.3.70. На сфере радиуса R в n -мерном пространстве берут наудачу две точки A и B . Найти функцию распределения и математическое ожидание длины хорды AB .

II.3.71. Точка P равномерно распределена на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Пусть η — длина проекции этой точки на некоторую фиксированную прямую (например, ось Ox). Найти плотность распределения и математическое ожидание случайной величины η .

II.3.72. Точка P равномерно распределена на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть η — длина проекции этой точки на некоторую фиксированную прямую (например, ось Ox). Найти плотность распределения и математическое ожидание величины η .

II.3.73. Точка P равномерно распределена на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Пусть γ — длина проекции этой точки на фиксированную плоскость (например, плоскость xOy). Найти плотность распределения γ и математическое ожидание γ .

Замечание. Ниже в задачах II.3.74—II.3.76 под словами «выбрано случайное направление в n -мерном пространстве» следует понимать «взята наудачу точка на единичной сфере».

II.3.74. Пусть N — фиксированная точка на сфере радиуса R . Через точку N в случайном направлении проведена прямая, которая пересекает сферу в точке P . Доказать, что длина хорды NP является случайной величиной, имеющей равномерное распределение на $[0, 2R]$.

II.3.75. Равнобедренный треугольник образован единичным вектором оси Ox и единичным вектором со случайным направлением. Найти функцию распределения третьей стороны этого треугольника: а) в случае плоскости, б) в случае трехмерного пространства.

II.3.76. Пусть N — фиксированная точка на окружности радиуса R . Через точку N в случайном направлении проведена прямая, пересекающая окружность в точке P . Найти распределение длины хорды NP .

II.3.77. Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид

$$p(x, y) = \begin{cases} [(1 + ax)(1 + ay) - a] e^{-x-y-axy}, & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{в других случаях,} \end{cases}$$

где $0 < a < 1$.

Найти: а) плотность распределения ξ и η ; б) функцию распределения (ξ, η) .

II.3.78. Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) равна

$$p(x, y) = \begin{cases} 24x^2y(1-x), & 0 < x < 1, 0 < y < 1; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычислить: а) плотность распределения ξ ; б) плотность распределения η . Доказать, что ξ и η независимы.

II.3.79. Пусть $p_1(x)$ и $p_2(x)$ — плотности распределения, $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — соответствующие функции распределения и $|a| < 1$. Доказать, что

$$а) f(x, y) = p_1(x)p_2(y)\{1 + a[2F_1(x) - 1][2F_2(y) - 1]\}$$

является плотностью распределения некоторого случайного вектора (ξ, η) ; б) плотности распределения ξ и η равны соответственно $p_1(x)$ и $p_2(x)$.

II.3.80. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые нормально распределенные $N(0, 1)$ случайные величины. Вычислить

$$P\{\xi_1^2 + \xi_2^2 \leq R^2\}.$$

II.3.81. Плотность распределения вектора (ξ, η) равна

$$p(x, y) = \begin{cases} 24xy(1-x^2), & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Доказать, что ξ и η независимы,

II.3.82. Плотность распределения вектора (ξ, η) равна

$$p(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычислить: а) плотность распределения ξ , б) плотность распределения η .

II.3.83. Плотность распределения вектора (ξ, η) равна

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{x^{p-1}(y-x)^{q-1}e^{-y}}{\Gamma(p)\Gamma(q)} & \text{при } 0 < x < y; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти плотности распределения ξ и η .

II.3.84. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . Найти функцию распределения случайной величины

$$\frac{\xi}{\xi + \eta}.$$

II.3.85. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . Найти функцию распределения случайной величины

$$\frac{\xi + \eta}{\xi}.$$

II.3.86. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и показательно распределены с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Найти функцию распределения случайной величины

$$\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}.$$

II.3.87. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти функцию распределения случайной величины

$$\eta = \frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2}.$$

II.3.88. Бегуны A и B стартовали одновременно и финишируют в моменты времени T_A и T_B , которые явля-

ются независимыми одинаково распределенными случайными величинами, имеющими показательное распределение с параметром λ . Найти вероятность того, что время проигравшего спортсмена превосходит тот запас времени, благодаря которому лидер выиграл.

II.3.89. Плотность распределения вектора (ξ, η) равна

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Вычислить плотность распределения случайной величины

$$\gamma = \max(|\xi|, |\eta|).$$

II.3.90. Пусть ξ_1 , ξ_2 и Θ — независимые случайные величины, причем ξ_1 и ξ_2 одинаково нормально распределены с параметрами 0 и 1, а величина θ равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$. Определить распределение величины $\xi_1 \cos \theta + \xi_2 \sin \theta$.

Замечание. В задачах II.3.91—94 предполагается, что функции распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 непрерывны.

II.3.91. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины и $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Доказать, что:

$$а) F_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_2}(x-u) dF_{\xi_1}(u) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}(x-u) dF_{\xi_2}(u);$$

б) если хотя бы одна из случайных величин ξ_1 или ξ_2 имеет плотность распределения, то величина η имеет плотность распределения

$$p_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x-v) dF_{\xi_2}(v)$$

или

$$p_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2}(x-u) dF_{\xi_1}(u);$$

в) если величины ξ_1 и ξ_2 имеют плотности распределения, то

$$p_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x-v) p_{\xi_2}(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2}(x-u) p_{\xi_1}(u) du.$$

II.3.92. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины и $\eta = \xi_1 - \xi_2$. Доказать, что:

$$\text{а) } F_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi_1}(x+v) dF_{\xi_2}(v) = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - F_{\xi_2}(u-x)] \times \\ \times dF_{\xi_1}(u);$$

б) если хотя бы одна из величин ξ_1 и ξ_2 имеет плотность распределения, то η имеет плотность и

$$p_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x+v) dF_{\xi_2}(v)$$

или

$$p_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2}(u-x) dF_{\xi_1}(u);$$

в) если существуют плотности распределения ξ_1 и ξ_2 , то

$$p_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x+v) p_{\xi_2}(v) dv = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_2}(u-x) p_{\xi_1}(u) du.$$

II.3.93. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины и $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$. Доказать, что:

$$\text{а) } F_\eta(x) = \int_{-\infty}^0 \left[1 - F_{\xi_2}\left(\frac{x}{u}\right) \right] dF_{\xi_1}(u) + \int_0^{\infty} F_{\xi_2}\left(\frac{x}{u}\right) dF_{\xi_1}(u);$$

б) если хотя бы одна из величин ξ_1 или ξ_2 имеет плотность распределения, то η имеет плотность распределения, причем

$$p_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|v|} p_{\xi_1}\left(\frac{x}{v}\right) dF_{\xi_2}(v)$$

или

$$p_\eta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} p_{\xi_2}\left(\frac{x}{u}\right) dF_{\xi_1}(u);$$

в) если случайные величины ξ_1 и ξ_2 имеют плотности распределения, то

$$p_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{|u|} p_{\xi_1}\left(\frac{x}{u}\right) p_{\xi_2}(u) du.$$

II.3.94. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины и $\eta = \xi_1/\xi_2$. Доказать, что

$$а) F_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^0 [1 - F_{\xi_1}(vx)] dF_{\xi_2}(v) + \int_0^{\infty} F_{\xi_1}(vx) dF_{\xi_2}(v);$$

б) если величина ξ_1 имеет плотность распределения, то величина η тоже имеет плотность распределения и

$$p_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| p_{\xi_1}(vx) dF_{\xi_2}(v);$$

в) если ξ_1 и ξ_2 имеют плотность распределения, то

$$p_{\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |v| p_{\xi_1}(vx) p_{\xi_2}(v) dv.$$

II.3.95. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

II.3.96. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и распределены равномерно на отрезке $[0, 1]$. Найти плотность распределения случайных величин: а) $\eta = \xi_1 \cdot \xi_2$; б) $\xi_1 - \xi_2$; в) $|\xi_1 - \xi_2|$.

II.3.97. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi_1 - \xi_2$.

II.3.98. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$. Найти функцию распределения $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

II.3.99. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины с плотностями распределения $p(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

II.3.100. Пусть ξ и η независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . Вычислить: а) плотность распределения $\xi - \eta$; б) плотность распределения $|\xi - \eta|$.

II.3.101. Случайные величины ξ и η независимы, причем $p_{\xi}(x) = 12x^2(1-x)$, $x \in (0, 1)$; $p_{\eta}(y) = y$, $y \in (0, 1)$. Найти распределение произведения $\xi\eta$.

II.3.102. Случайные величины ξ и η независимы и имеют плотности распределения

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1; \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

$$p_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ xe^{-x^{3/2}}, & x > 0. \end{cases}$$

Доказать, что случайная величина $\xi\eta$ имеет нормальное распределение.

II.3.103. Случайные величины ξ и η нормально распределены $N(0, \sigma^2)$ и независимы. Доказать, что отношение $\gamma = \xi/\eta$ имеет распределение Коши.

II.3.104. Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены с плотностью распределения $p_{\xi}(x) = p_{\eta}(x) = \frac{c}{1+x^4}$. Вычислить: а) константу c ; б) плотность распределения $\gamma = \frac{\xi}{\eta}$.

II.3.105. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . Найти: а) функцию распределения $\frac{\xi}{\eta}$; б) плотность распределения $\frac{\xi}{\eta}$; в) математическое ожидание $\frac{\xi}{\eta}$.

II.3.106. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что плотность распределения случайной величины $\xi + \eta$ равна

$$\lambda_1 \lambda_2 \frac{e^{-\lambda_1 x} - e^{-\lambda_2 x}}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (x > 0).$$

II.3.107. Пусть $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины; имеющие показательное распределение с параметрами $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ соответственно ($\lambda_k \neq \lambda_j$,

$k \neq j$). Доказать, что плотность распределения случайной величины $S_n = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_n$ имеет вид

$$\lambda_0 \dots \lambda_n [\psi_{0n} e^{-\lambda_0 x} + \dots + \psi_{nn} e^{-\lambda_n x}] \quad (x > 0),$$

где

$$\frac{1}{\psi_{kn}} = (\lambda_0 - \lambda_k) \dots (\lambda_{k-1} - \lambda_k) (\lambda_{k+1} - \lambda_k) \dots (\lambda_n - \lambda_k).$$

II.3.108. Пусть вектор (ξ_1, ξ_2) имеет плотность распределения $p_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)$. Доказать, что случайные величины $\xi_1 + \xi_2$, $\xi_1 - \xi_2$ имеют плотности распределения, причем:

$$a) p_{\xi_1 + \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(\xi_1, \xi_2)}(x, z - x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(\xi_1, \xi_2)}(z - y, y) dy,$$

$$б) p_{\xi_1 - \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(\xi_1, \xi_2)}(z + y, y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(\xi_1, \xi_2)}(x, x - z) dx.$$

II.3.109. Пусть вектор (ξ_1, ξ_2) имеет плотность распределения $p_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)$. Доказать, что случайные величины $\xi_1 \xi_2$ и ξ_1 / ξ_2 имеют плотность распределения, причем:

$$a) p_{\xi_1 \xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(\xi_1, \xi_2)}\left(\frac{z}{y}, y\right) \frac{dy}{|y|} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(\xi_1, \xi_2)}\left(x, \frac{z}{x}\right) \times \\ \times \frac{dx}{|x|};$$

$$б) p_{\frac{\xi_1}{\xi_2}}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{(\xi_1, \xi_2)}(zy, y) |y| dy.$$

II.3.110. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет плотность распределения

$$p(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{при } 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1; \\ 0 & \text{при всех остальных } (x, y). \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

II.3.111. Плотность распределения вектора (ξ_1, ξ_2) равна

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda^2 e^{-2x} & \text{при } 0 < y < x, \\ 0 & \text{при всех остальных } (x, y). \end{cases}$$

Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

II.3.112. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) имеет плотность распределения

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(p+q+r)}{\Gamma(p)\Gamma(q)\Gamma(r)} x^{p-1} y^{q-1} (1-x-y) & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } y > 0, x+y < 1. \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

II.3.113. Пусть вектор (ξ_1, ξ_2) имеет плотность распределения $p_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y)$. Доказать, что случайная величина $\rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ имеет плотность распределения, причем

$$p_\rho(z) = \begin{cases} z \int_0^{2\pi} p_{(\xi_1, \xi_2)}(z \cos \theta, z \sin \theta) d\theta & \text{при } z \geq 0; \\ 0 & \text{при } z < 0. \end{cases}$$

II.3.114. Распределение Релея. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые нормально распределенные случайные величины, причем $M\xi_1 = M\xi_2 = 0$, $D\xi_1 = D\xi_2 = \sigma^2$. Пусть $\gamma = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$. Доказать, что при $z > 0$

$$p_\gamma(z) = \frac{z}{\sigma^2} e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}.$$

II.3.115. Случайный вектор (ξ, η) имеет плотность распределения

$$p(x, y) = \begin{cases} 24xy(1-x^2), & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения $\gamma = \xi \cdot \eta$.

II.3.116. Плотность распределения вектора (ξ, η) равна

$$p(x, y) = \begin{cases} xe^{-x(1+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Вычислить плотность распределения $\xi\eta$.

II.3.117. Случайная величина ξ имеет гамма-распределение с параметрами (α, β) , если плотность распределения ξ равна

$$p(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Вычислить: а) $M\xi$; б) $D\xi$; в) $M\xi^n$.

II.3.118. Пусть ξ — нормально распределенная величина $N(0, 1)$. Доказать, что случайная величина $\eta = \xi^2$ имеет гамма-распределение с параметрами $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

II.3.119. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие гамма-распределение с параметрами (α_1, β) и (α_2, β) соответственно. Доказать, что случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

II.3.120. (Распределение Эрланга.) Пусть $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что величина $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$ имеет такую плотность распределения:

$$p_{S_n}(x) = \begin{cases} \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

II.3.121. (Распределение χ^2 с n степенями свободы). Пусть случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы и имеют нормальное распределение $N(0, 1)$. Доказать, что плотность распределения случайной величины $\chi^2 = \xi_1^2 + \dots + \xi_n^2$ равна

$$f_{\chi^2}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

II.3.122. Пусть $\xi_1, \dots, \xi_n, \eta_1, \dots, \eta_n$ — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $N(0, 1)$. Найти плотность распределения случайной величины

$$\frac{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}{\eta_1^2 + \dots + \eta_n^2}.$$

II.3.123. (Распределение Стьюдента.) Пусть ξ, ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $N(0, 1)$. Доказать, что плотность распределения случайной величины

$$\eta = \frac{\xi}{\sqrt{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2}}$$

равна

$$f_{\eta}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{n+1}{2}}}, \quad (x > 0).$$

П.3.124. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины. Найти функцию распределения $\eta = \xi_1 + \xi_2$. Вычислить $M\eta$.

П.3.125. Пусть $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ — независимые равномерно распределенные на $[0, 1]$ случайные величины. Доказать, что величины $2 \ln(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ имеет распределение χ^2 с $2n$ степенями свободы.

П.3.126. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые нормально распределенные случайные величины с нулевыми математическими ожиданиями и дисперсиями σ_1^2 и σ_2^2 . Доказать, что случайная величина $\eta = \xi_1 \xi_2 / \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}$ нормально распределена с параметрами $(0, \sigma^2)$, где $\frac{1}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2}$.

П.3.127. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют нормальные распределения $N(a_1, \sigma_1^2)$ и $N(a_2, \sigma_2^2)$. Доказать, что случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ имеет нормальное распределение $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

П.3.128. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами 0 и 1 каждая. Доказать, что величины $\xi_1 - \xi_2$ и $\xi_1 + \xi_2$ независимы.

П.3.129. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что величины $\xi_1 - \xi_2$ и $\min(\xi_1, \xi_2)$ независимы.

П.3.130. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром $\lambda > 0$ каждая. Обозначим через $\xi_{(1)}$ и $\xi_{(2)}$ соответственно меньшую и большую из ξ_1 и ξ_2 . Доказать, что величины $\xi_{(1)}$ и $\xi_{(2)} - \xi_{(1)}$ независимы и найти распределение каждой из них.

П.3.131. Случайные величины ξ и η независимы и имеют показательное распределение с параметром λ . Доказать, что величины $\xi + \eta$ и $\frac{\xi}{\eta}$ тоже независимы.

П.3.132. Пусть ξ и η — независимые нормально распределенные $N(0, \sigma^2)$ случайные величины. Доказать, что случайные величины $\xi^2 + \eta^2$ и $\frac{\xi}{\eta}$ независимы.

П.3.133. Пусть $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ — независимые нормально распределенные $N(0, 1)$ случайные величины. Доказать,

что величины $\frac{\xi_k^2}{\sum_{i=1}^n \xi_i^2}$, $\sum_{i=1}^n \xi_i^2$ независимы.

П.3.134. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \eta$ — независимые случайные величины, причем каждая из величин ξ_k ($1 \leq k \leq n$) принимает значения 0 и 1 с вероятностью $\frac{1}{2}$. Случайная величина η равномерно распределена на $[0, 1]$. Доказать,

что случайная величина $\frac{\eta}{2^n} + \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{2^k}$ равномерно распределена на $[0, 1]$.

П.3.135. Случайная величина ξ имеет распределение Коши. Доказать, что случайные величины: а) $\frac{1}{\xi}$; б) $\frac{2\xi}{1-\xi^2}$; в) $\frac{3\xi - \xi^3}{1-3\xi^2}$ имеют распределение Коши.

П.3.136. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие распределение Коши. Доказать, что случайная величина $\eta = \frac{\xi_1 + \xi_2}{1 - \xi_1 \xi_2}$ также имеет распределение Коши.

П.3.137. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины с распределением Коши. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi_1 \xi_2$.

П.3.138. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1, 1]$. Найти коэффициент корреляции для каждой из следующих пар случайных величин:

(а) ξ и ξ^2 ; (б) ξ и $\sin(1/2\pi\xi)$; (с) ξ и ξ^3 ; (д) $\sin(1/2\pi\xi)$ и $\cos(1/2\pi\xi)$.

П.3.139. Точка (ξ, η) равномерно распределена внутри треугольника с вершинами $(0, 0)$, $(1, 0)$ и $(0, 1)$. Найти коэффициент корреляции между ξ и η .

П.3.140. Доказать, что если величина ξ некоррелирована с величинами η_1, \dots, η_k , то она некоррелирована с величи-

ной $\alpha_1\eta_1 + \dots + \alpha_k\eta_k$, какими бы ни были действительные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

П.3.141. Доказать, что если величины ξ_1, \dots, ξ_n попарно некоррелированы, то $D(\xi_1 + \dots + \xi_n) = D\xi_1 + \dots + D\xi_n$.

П.3.142. Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с одинаковыми параметрами a и σ^2 . Найти коэффициент корреляции случайных величин $\gamma_1 = \alpha\xi + \eta$ и $\gamma_2 = \alpha\xi - \beta\eta$.

П.3.143. Случайные величины ξ и η независимы и имеют нормальное распределение $N(0, 1)$. Вычислить $M(\text{sign } \xi + \text{sign } \eta)^2$.

П.3.144. Точка $P = (\xi, \eta)$ равномерно распределена в области $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Найти: а) плотность распределения ξ ; б) плотность распределения η ; в) $M\xi, M\eta$; г) ковариацию ξ и η . Убедиться, что величины ξ и η некоррелированы, но зависимы.

П.3.145. Точка $P = (\xi, \eta)$ равномерно распределена в области $|x| + |y| \leq a$. Найти:

а) плотности распределения ξ и η ;

б) $M\xi, M\eta$; в) ковариацию ξ и η .

П.3.146. Пусть $f(x)$ — плотность распределения, сосредоточенная на $(0, +\infty)$. Положим

$$p(x, y) = \begin{cases} \frac{f(x+y)}{x+y}, & x > 0, y > 0, \\ 0 & \text{для всех остальных } (x, y). \end{cases}$$

Доказать, что $p(x, y)$ — плотность распределения некоторого случайного вектора (ξ_1, ξ_2) . Вычислить ковариационную матрицу (ξ_1, ξ_2) .

П.3.147. Пусть $\xi_i (i = 1, 2, \dots, n)$ — независимые и одинаково распределенные случайные величины, причем $M(\xi - M\xi)^2 = 0$. Доказать, что случайные величины

$$\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i \text{ и } s^2 = \sum_{i=1}^n (\xi_i - \xi)^2$$

некоррелированы.

П.3.148. На интервале $[0, 1]$ фиксирована точка a . Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$. Пусть η — расстояние от точки ξ до a . Найти коэффициент корреляции между ξ и η . При каком a ξ и η некоррелированы?

П.3.149. Пусть

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (1)$$

является взаимно однозначным отображением R^n на R^n , а

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \quad (2)$$

является обратным отображением. Пусть (ξ_1, \dots, ξ_n) — случайный вектор с плотностью распределения

$$p(\xi_1, \dots, \xi_n)(x_1, \dots, x_n),$$

а

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ &\vdots \\ \eta_n &= f_n(\xi_1, \dots, \xi_n). \end{aligned}$$

Доказать, что плотность распределения $p(\eta_1, \dots, \eta_n)(y_1, \dots, y_n)$ случайного вектора (η_1, \dots, η_n) равна

$$p(\eta_1, \dots, \eta_n)(y_1, \dots, y_n) = p(\xi_1, \dots, \xi_n)(g_1(y_1, \dots, y_n), \dots, g_n(y_1, \dots, y_n)) \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \right|,$$

где $\frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}$ — якобиан преобразования (2).

П.3.150. Плотность распределения вектора (ξ, η) равна

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

Пусть (R, Φ) — полярные координаты точки (ξ, η) . Вычислить: а) совместную плотность распределения (R, Φ) ; б) плотность распределения R ; в) плотность распределения Φ . Доказать, что R и Φ независимые случайные величины.

П.3.151. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины, которые имеют нормальное $N(0, 1)$ распределение, и пусть

$$\begin{aligned}\eta_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2); \\ \eta_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(\xi_1 + \xi_2 - 2\xi_3); \\ \eta_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3).\end{aligned}$$

Доказать, что случайные величины η_1, η_2, η_3 независимы и каждая из них имеет нормальное $N(0, 1)$ распределение.

П.3.152. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие нормальное $N(0, 1)$ распределение. Доказать, что случайный вектор (η_1, η_2) , где

$$\begin{cases} \eta_1 = \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\xi_1^2 + \xi_2^2) \right\}; \\ \eta_2 = \frac{1}{\pi} \arctg \left(\frac{\xi_1}{\xi_2} \right) + \frac{1}{2}, \end{cases}$$

имеет равномерное распределение в прямоугольнике $[0, 1] \times \left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$.

П.3.153. Плотность распределения (ξ, η) имеет вид $p(x, y) = \frac{2}{\pi}(1 - x^2 - y^2)$, $0 \leq x^2 + y^2 \leq 1$. Вычислить плотность распределения (R, Φ) , где (R, Φ) — полярные координаты (ξ, η) .

П.3.154. Случайные величины ξ и η независимы; ξ имеет показательное распределение с параметром λ , η — равномерно распределена на отрезке $[0, 2\pi]$. Пусть $\gamma_1 = \sqrt{\xi} \cos \eta$, $\gamma_2 = \sqrt{\xi} \sin \eta$. Доказать, что случайные величины γ_1 и γ_2 независимы и одинаково распределены с плотностью распределения

$$p_{\gamma_1}(x) = p_{\gamma_2}(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} \exp \{-\lambda^2 x\}.$$

П.3.155. Вектор (ξ_1, ξ_2) имеет плотность распределения $p(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$. Найти плотность распределения вектора (R, Φ) , где R и Φ — полярные координаты точки (ξ_1, ξ_2) .

П.3.156. Пусть $p(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{(1+x_1^2+x_2^2)^3}}$.

а) Доказать, что $p(x_1, x_2)$ — плотность распределения некоторого случайного вектора (ξ_1, ξ_2) .

б) Найти плотность распределения ξ_1 и плотность распределения ξ_2 .

в) Найти совместную плотность распределения (R, Φ) , где (R, Φ) — полярные координаты (ξ_1, ξ_2) .

II.3.157. Пусть вектор (ξ_1, ξ_2, ξ_3) имеет плотность распределения

$$p(x_1, x_2, x_3) = g(\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}).$$

Найти совместную плотность распределения (R, Θ, Φ) , где (R, Θ, Φ) — сферические координаты точки (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

II.3.158. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины, имеющие нормальное $N(0, \sigma^2)$ распределение. Найти совместную плотность распределения (R, Θ, Φ) , где (R, Θ, Φ) — сферические координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

II.3.159. Пусть

$$p(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\pi^2} \frac{1}{(1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2}.$$

а) Доказать, что $p(x_1, x_2, x_3)$ — плотность распределения некоторого случайного вектора (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

б) Найти плотности распределения ξ_1, ξ_2, ξ_3 .

в) Найти плотность распределения (R, Θ, Φ) , где (R, Θ, Φ) — сферические координаты (ξ_1, ξ_2, ξ_3) .

II.3.160. Сферически симметричным случайным вектором назовем случайный вектор, направление которого выбирается случайно, а длина является случайной величиной, не зависящей от направления. Пусть $V(x)$ — функция распределения длины сферически симметричного случайного вектора в R^3 , $F(x)$ — функция распределения длины проекции вектора на ось Ox , а $v(x)$ и $f(x)$ — соответствующие плотности распределения. Доказать, что:

$$а) F(t) = \int_0^t V\left(\frac{t}{x}\right) dx \quad (t > 0);$$

$$б) v(t) = -tf'(t), \quad (t > 0).$$

II.3.161. (Распределение Максвелла). Пусть проекции вектора скорости на координатные оси являются

нормально распределенными $N(0, 1)$ и независимыми случайными величинами. Доказать, что плотность распределения скорости равна

$$v(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} (t > 0).$$

П.3.162. Пусть $V(x)$ — функция распределения длины сферически симметричного вектора в R^2 , а $F(x)$ — функция распределения длины проекции этого вектора на ось Ox . Доказать, что

$$F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} V\left(\frac{x}{\sin \varphi}\right) d\varphi.$$

П.3.163. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . Доказать, что случайная величина $\xi_{(1)} = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$ имеет показательное распределение с параметром $n\lambda$.

П.3.164. Система состоит из n блоков. Пусть ξ_i — время безотказной работы i -го блока. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n — независимы и имеют показательное распределение с параметром λ . Система выходит из строя, если перестает работать хотя бы один из блоков. Найти функцию распределения времени безотказной работы системы и математическое ожидание времени безотказной работы.

П.3.165. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ . Найти функцию распределения случайной величины $\xi_{(n)} = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$.

П.3.166. Система состоит из n блоков. Пусть ξ_i — время безотказной работы i -го блока. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n — независимы и имеют показательное распределение с параметром λ . Система работает пока работает по крайней мере один блок. Найти функцию распределения времени безотказной работы системы и математическое ожидание времени безотказной работы.

П.3.167. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые одинаково распределенные случайные величины с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Упорядочим их по величине $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$. Найти: а) функцию распределения

$\xi_{(1)} = \min(\xi_1, \dots, \xi_n)$, б) функцию распределения $\xi_{(n)} = \max(\xi_1, \dots, \xi_n)$, в) функцию распределения $\xi_{(m)}$.

II.3.168. Предполагая, что функция распределения ξ_i имеет плотность распределения $p(x)$, найти плотность распределения $\xi_{(m)}$.

II.3.169. Найти совместную функцию распределения и совместную плотность распределения случайных величин $\xi_{(k)}$ и $\xi_{(m)}$ ($k < m$).

II.3.170. Найти функцию распределения случайной величины

$$\eta_n = \xi_{(n)} - \xi_{(1)}.$$

II.3.171. Система состоит из n блоков. Пусть ξ_i — время безотказной работы i -го блока. Случайные величины ξ_1, \dots, ξ_n независимы и показательно распределены с параметром λ . Система работает до тех пор, пока из строя не выйдет k блоков. Обозначим через γ время безотказной работы системы. Вычислить функцию распределения и плотность распределения γ .

II.3.172. Три человека A , B и C приходят в почтовое отделение и застают свободными два окна. Обслуживание A и B начинается сразу же, а обслуживание C начинается тогда, когда закончится обслуживание или A или B . Длительности обслуживания являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с показательным распределением. а) Какая вероятность того, что C уйдет с почтового отделения не последним? б) Каково распределение и математическое ожидание времени, проведенного C в почтовом отделении?

II.3.173. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, T]$. Упорядочим их по величине $\xi_{(1)} \leq \xi_{(2)} \leq \dots \leq \xi_{(n)}$. а) Найти совместную функцию распределения вектора $(\xi_{(1)}, \dots, \xi_{(n)})$.

б) Найти функцию распределения и плотность распределения величины $\xi_{(k)}$.

II.3.174. Используя теоретико-вероятностные рассуждения, установить следующую формулу преобразования кратных интегралов:

$$\int_{\sum_{k=1}^n x_k \leq 1} \dots \int f\left(\sum_{k=1}^n x_k\right) x_1^{\alpha_1-1} \dots x_n^{\alpha_n-1} dx_1 \dots dx_n =$$

$x_i \geq 0$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n)} \int_0^1 f(u) u^{\sum_{k=1}^n \alpha_k - 1} du$$

(интеграл Лиувилля).

Замечание. Введем обозначение, которое используем при формулировке задач П.3.175—178:

$$x_+ = \frac{x + |x|}{2} = \begin{cases} x & \text{при } x \geq 0; \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

П.3.175. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, T]$. Точки ξ_1, \dots, ξ_n делят отрезок $[0, T]$ на $n + 1$ отрезок. Длины этих отрезков обозначим через $\eta_1, \dots, \eta_n, \eta_{n+1}$.

а) Найти совместное распределение η_1, \dots, η_n .

б) Доказать, что случайные величины η_1, \dots, η_n имеют одинаковую функцию распределения. Какую именно?

в) Доказать, что для любых $x_1 \geq 0, \dots, x_{n+1} \geq 0$

$$P\{\eta_1 > x_1, \dots, \eta_{n+1} > x_{n+1}\} = \frac{(T - x_1 - \dots - x_{n+1})^n}{T^n}.$$

г) Пусть $p_n(T)$ — вероятность того, что длина каждого из отрезков η_1, \dots, η_n больше, чем h . Доказать, что

$$p_n(T) = \frac{[T - (n+1)h]_+^n}{T^n}.$$

д) Вычислить

$$M\eta_1^{\alpha_1-1} \eta_2^{\alpha_2-1} \dots \eta_n^{\alpha_n-1}, \quad M \sum_{k=1}^n \eta_k^2.$$

П.3.176. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, равномерно распределенные на отрезке $[0, 1]$. Найти функцию распределения $\eta_n = \xi_{(n)} - \xi_{(1)}$ и $M\eta_n$. Вычислить вероятность того, что все n точек ξ_1, \dots, ξ_n лежат в некотором интервале длины t .

П.3.177. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, имеющие показательное распределение с параметром λ и $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Положим

$$\gamma_k = \frac{\xi_k}{\eta_k} \quad (k = 1, \dots, n-1), \quad \gamma_n = \eta_n.$$

1) Найти: а) совместную плотность $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$
б) совместную плотность $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$.

2) Доказать, что $(\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ имеют ту же плотность распределения, что и в случае, когда γ_k есть длина k -го интервала при случайном разбиении интервала $(0, 1)$ набором $n-1$ равномерно распределенных точек.

П.3.178. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, имеющие равномерное распределение на $[0, a]$ и $s_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Обозначим через $U_n(x)$ и $u_n(x)$ соответственно функцию распределения и плотность распределения s_n .

1) Доказать, что:

$$a) U_{n+1}(x) = \frac{1}{a} \int_0^a u_n(x-y) dy = \frac{1}{a} [U_n(x) - U_n(x-a)];$$

$$б) U_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (x - ka)_+^n;$$

$$в) U_n(x) = \frac{1}{a^n (n-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k (x - ka)_+^{n-1}.$$

2) Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[-b, b]$ и $s_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Вычислить плотность распределения s_n .

3. На окружности длины t задано n дуг длиной a , центры которых выбраны независимо и наудачу. Доказать, что вероятность $\varphi_n(t)$ того, что эти n дуг покрывают всю окружность, равна

$$\varphi_n(t) = a^n (n-1)! U_n(t) \frac{1}{t^{n-1}},$$

т. е.

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \left(1 - k \frac{a}{t}\right)_+^{n-1}.$$

4) Пусть интервал $(0, t)$ разбит на n частей способом независимого выбора $n-1$ точек ξ_1, \dots, ξ_{n-1} , которые равномерно распределены на $(0, t)$. Доказать, что вероятность того, что ни один из этих интервалов не превышает a , равна $\varphi_n(t)$.

5) Рассмотрим n единичных случайных векторов в R^3 , направления которых выбираются наудачу. Пусть L_n —

длина суммы этих векторов. Найти плотность распределения L_n .

II.3.179. Пусть D — квадратируемая область в n -мерном пространстве. $V(D)$ — ее объем (мера Лебега).

а) Используя теоретико-вероятностные соображения, вывести следующую формулу, которая выражает $2n$ -кратный интеграл через однократный:

$$\iint_{DD} f(|x - y|) dx dy = V^2(D) \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dF_D(z),$$

где $|x - y|$ — расстояние между точками x и y , $F_D(z)$ — функция распределения расстояния между двумя точками, взятыми в D независимо с равномерным распределением.

б) Доказать, что

$$\int_0^T \int_0^T f(|u - v|) du dv = 2 \int_0^T (T - z) f(z) dz.$$

в) Пусть $S_n(R)$ — сфера радиуса R в n -мерном пространстве, $m(\cdot)$ — мера Лебега на $S_n(R)$. Доказать, что

$$\begin{aligned} & \int_{S_n(R)} \int_{S_n(R)} f(|x - y|) m_n(dx) m_n(dy) = \\ &= \frac{2^n (\pi R)^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^{2R} z^{n-2} \left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} f(z) dz. \end{aligned}$$

II.3.180. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина, имеющая плотность распределения, η — случайная величина с равномерным распределением на $(0, \xi)$, $\gamma = \xi - \eta$. Доказать, что случайные величины γ и η независимы тогда и только тогда, когда

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} a^2 x e^{-ax}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

II.3.181. Пусть ξ_{11} , ξ_{12} , ξ_{21} , ξ_{22} — независимые случайные величины, имеющие нормальное $N(0, 1)$ распределение. Найти распределение величины

$$\Delta = \begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{vmatrix}.$$

П.3.182. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — положительные независимые одинаково распределенные случайные величины. Вычислить

$$M \frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_k}{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}.$$

П.3.183. Функцией концентрации случайной величины ξ называют

$$Q_\xi(l) = \sup_{x \in R^1} P\{x \leq \xi \leq x + l\}, \quad 0 \leq l \leq \infty.$$

а) Найти $Q_\xi(+\infty)$ и $Q_\xi(0)$;

б) Доказать, что $Q_\xi(l)$ не убывает;

в) Выразить $Q_\xi(l)$ через функцию распределения ξ .

г) Пусть ξ, η — независимые случайные величины.

Доказать, что $Q_{\xi+\eta}(l) \leq Q_\xi(l)$, $Q_{\xi+\eta}(l) \leq Q_\eta(l)$.

д) Если функция распределения одной из величин ξ или η непрерывна, то функция распределения $\xi + \eta$ непрерывна.

П.3.184. Пусть случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью распределения

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{x^2 + a^2}.$$

Найти $Q_\xi(l)$.

§ 4. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НА ПЛОСКОСТИ

Вектор ξ_1, ξ_2 имеет нормальное распределение $N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ на плоскости, если плотность распределения (ξ_1, ξ_2) имеет вид

$$p_{(\xi_1, \xi_2)}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1^2\sigma_2^2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}.$$

При этом

$$\begin{aligned} M\xi_1 &= a_1, \quad M\xi_2 = a_2, \\ D\xi_1 &= \sigma_1^2, \quad D\xi_2 = \sigma_2^2, \\ M(\xi_1 - a_1)(\xi_2 - a_2) &= \rho. \end{aligned}$$

П.4.1. Пусть вектор (ξ_1, ξ_2) имеет нормальное распределение $N(a_1, a_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$. Доказать, что каждая из величин ξ_1 и ξ_2 имеет соответственно нормальное распределение $N(a_1, \sigma_1^2)$ и $N(a_2, \sigma_2^2)$.

II.4.2. Пусть $\varphi_1(x, y)$ и $\varphi_2(x, y)$ — две плотности двумерных нормальных распределений на плоскости с нулевыми математическими ожиданиями, единичными дисперсиями, но разными коэффициентами корреляции. Доказать, что:

а) функция $\frac{1}{2}(\varphi_1(x, y) + \varphi_2(x, y))$

есть плотность распределения некоторого случайного вектора (ξ_1, ξ_2) ; б) вектор (ξ_1, ξ_2) не является нормальным; в) каждая из величин ξ_1 и ξ_2 имеет нормальное $N(0, 1)$ распределение.

II.4.3. Пусть $u(x)$ — нечетная непрерывная функция на $(-\infty, +\infty)$, равная нулю вне интервала $(-1, 1)$, и

$$|u(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}.$$

Пусть далее $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$. Доказать, что

а) функция $\varphi(x)\varphi(y) + u(x)u(y)$ является плотностью распределения некоторого случайного вектора (ξ_1, ξ_2) ; б) вектор (ξ_1, ξ_2) не является нормально распределенным вектором; в) каждая из величин ξ_1 и ξ_2 имеет нормальное распределение.

II.4.4. Пусть

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

и

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & (x, y) \in E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_7, \\ 2\varphi(x)\varphi(y), & (x, y) \in E_2 \cup E_4 \cup E_6 \cup E_8, \end{cases}$$

где области E_1, \dots, E_8 определены так, как это показано на рис. 7. Доказать, что $f(x, y)$ есть плотность распределения некоторого случайного вектора (ξ_1, ξ_2) и что распределение каждой из величин ξ_1 и ξ_2 нормальное.

Замечание. Результаты задач II.4.2—6 показывают, что вектор (ξ_1, ξ_2) может не иметь нормальное распределение, а каждая компонента его может быть распределена нормально.

II.4.5. Доказать, что произвольная линейная комбинация нормально распределенного вектора имеет нормальное распределение.

II.4.6. Случайный вектор (ξ_1, ξ_2) нормально распределен на плоскости. Доказать, что случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы тогда и только тогда, когда коэффициент корреляции ξ_1 и ξ_2 равен нулю.

II.4.7. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, имеющие нормальное $N(0, 1)$ -распределение. Пусть также

$$\eta_1 = \sum_{k=1}^n a_k \xi_k, \quad \eta_2 = \sum_{k=1}^n b_k \xi_k.$$

Доказать, что η_1 и η_2 независимы тогда и только тогда, когда $\sum_{k=1}^n a_k b_k = 0$.

II.4.8. Пусть (ξ_1, ξ_2) нормальный случайный вектор, причем $a_1 = a_2 = 0$, и $\eta_1 = \xi_1 \cos \alpha + \xi_2 \sin \alpha$, $\eta_2 = -\xi_1 \sin \alpha + \xi_2 \cos \alpha$.

Доказать, что: а) плотность распределения случайного вектора (η_1, η_2) равна

$$p_{(\eta_1, \eta_2)}(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \times \\ \times \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} [Ay^2 - 2By_1y_2 + Cy_2^2] \right\},$$

где

$$A = \frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_2^2}, \\ B = \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sigma_1^2} - \rho \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sigma_1\sigma_2} - \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sigma_2^2}; \\ C = \frac{\sin^2 \alpha}{\sigma_1^2} + 2\rho \frac{\cos \alpha \sin \alpha}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sigma_2^2};$$

б) если $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$, то η_1 и η_2 независимы.

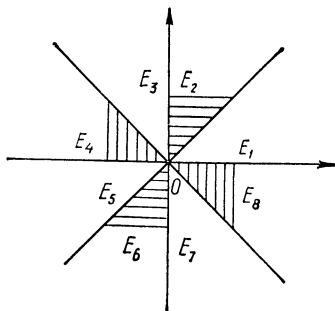


Рис. 7

П.4.9. Пусть (ξ_1, ξ_2) — нормально распределенный случайный вектор, причем $a_1 = a_2 = 0$. Доказать, что плотность распределения случайной величины $\eta = \frac{\xi_1}{\xi_2}$ равна

$$p_\eta(x) = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2 \sqrt{1 - \rho^2}}{\pi (\sigma_2^2 x^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 x + \sigma_1^2)}.$$

П.4.10. Пусть (ξ_1, ξ_2) — нормально распределенный случайный вектор ($M\xi_1 = a_1$, $M\xi_2 = a_2$, $D\xi_1 = \sigma_1^2$, $D\xi_2 = \sigma_2^2$, коэффициент корреляции ξ_1 и ξ_2 равен ρ). Обозначим:

$$Q(x_1, x_2) = \frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left[\left(\frac{x_1 - a_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{(x_1 - a_1)(x_2 - a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2 - a_2)^2}{\sigma_2^2} \right].$$

Найти функцию распределения случайной величины $\eta = Q(\xi_1, \xi_2)$.

П.4.11. Доказать, что существует только одно распределение случайного вектора (ξ_1, ξ_2) на плоскости, имеющее такие свойства:

а) ξ_1 и ξ_2 — независимы и одинаково распределены;
б) распределение (ξ_1, ξ_2) сферически симметричное. Таким единственным распределением является нормальное распределение на плоскости с плотностью

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{\sigma^2} \right\}.$$

П.4.12. Пусть (ξ_1, ξ_2) — нормально распределенный вектор на плоскости ($M\xi_1 = M\xi_2 = 0$), (R, Φ) — полярные координаты точки (ξ_1, ξ_2) . Найти:

а) совместную плотность распределения (R, Φ) ; б) плотность распределения R ; в) плотность распределения Φ .

П.4.13. Пусть вектор (ξ, η) имеет нормальное распределение, причем $M\xi = M\eta = 0$, $M\xi^2 = M\eta^2 = 1$, $M\xi\eta = \rho$. Доказать, что

$$P\{\xi\eta > 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \rho$$

и

$$P\{\xi\eta < 0\} = \frac{1}{\pi} \arccos \rho.$$

II.4.14. Пусть вектор (ξ, η) имеет нормальное распределение, причем $M\xi = M\eta = 0$, $M\xi^2 = M\eta^2 = 1$, $M\xi\eta = \rho$. Доказать, что

$$M \max(\xi, \eta) = \sqrt{\frac{1-\rho}{\pi}}.$$

II.4.15. Пусть (ξ, η) — нормальный вектор, причем $M\xi = M\eta = 0$ и $M\xi\eta < 0$. Доказать, что $P\{\xi \geq a, \eta \geq b\} \leq P\{\xi \geq a\}P\{\eta \geq b\}$ при $a > 0, b > 0$.

II.4.16. Пусть (ξ_1, ξ_2) и (η_1, η_2) — два нормально распределенных вектора и $M\xi_k = M\eta_k = 0$ ($k = 1, 2$), $M\xi_k^2 = M\eta_k^2$ ($k = 1, 2$) и $M\xi_1\xi_2 \leq M\eta_1M\eta_2$. Доказать, что

$$P\{\max(\xi_1, \xi_2) > a\} \geq P\{\max(\eta_1, \eta_2) > a\}.$$

§ 5. НЕРАВЕНСТВО ЧЕБЫШЕВА И НЕКОТОРЫЕ ДРУГИЕ НЕРАВЕНСТВА

II.5.1. Доказать, что если существует $M\xi^2$, то

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M\xi^2.$$

II.5.2. Доказать, что если существует $M\xi^2$ и $M\xi = a$, то

$$P\{|\xi - a| > \varepsilon\} \leq \frac{D\xi}{\varepsilon^2}$$

(неравенство Чебышева).

II.5.3. Пусть $M\xi = 1$ и $D\xi = 0,04$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятность того, что $0,5 < \xi < 1,5$.

II.5.4. Пусть $M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$. Оценить вероятность $P\{|\xi - a| \leq 3\sigma\}$.

II.5.5. Пусть $f(x)$ — неотрицательная неубывающая функция на множестве значений случайной величины ξ и существует $Mf(\xi)$.

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{Mf(\xi)}{f(\varepsilon)}.$$

II.5.6. Пусть A — некоторое борелевское множество на числовой прямой, $f(x)$ — борелевская функция такая,

что: а) $f(x) \geq 0$ для $x \in (-\infty, +\infty)$; б) $f(x) \geq \varepsilon > 0$ при $x \in A$; в) существует $Mf(\xi)$. Доказать, что

$$P\{\xi \in A\} \leq \frac{Mf(\xi)}{\varepsilon}.$$

II.5.7. Пусть A — некоторое борелевское множество на числовой прямой, $f(x)$ — борелевская функция такая, что: а) $f(x) \leq 0$, если $x \notin A$; б) $f(x) \leq 1$, если $x \in A$; в) существует $Mf(\xi)$. Доказать, что

$$P\{\xi \in A\} \geq Mf(\xi).$$

II.5.8. Допуская существование $Mf(\xi)$, доказать, что имеют место такие оценки сверху и снизу для $P\{|\xi| > \varepsilon\}$:

а) $P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{Mf(\xi)}{f(\varepsilon)}$, если $f(\xi)$ неотрицательная, четная и неубывающая на $(+\varepsilon, \infty)$ функция;

б) $P\{|\xi| > \varepsilon\} \geq \frac{Mf(\xi) - f(\varepsilon)}{k}$, если $f(x)$ неотрицательная четная, неубывающая на $(0, \infty)$, ограниченная ($|f(x)| \leq k$) функция.

II.5.9. Доказать, что когда существует $M|\xi|^k$, то

$$P\{|\xi| > \varepsilon\} \leq \frac{M|\xi|^k}{\varepsilon^k}$$

(неравенство Маркова).

II.5.10. Доказать, что если при некотором $\varepsilon > 0$ существует $Me^{c\xi}$, то

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq e^{-c\varepsilon} Me^{c\xi}.$$

II.5.11. Пусть $M\xi = a$ и существует $M|\xi - a|^r = \mu_r$. Доказать, что:

$$\text{а) } P\{|\xi - a| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mu_r}{\varepsilon^r};$$

$$\text{б) } P\left\{\frac{|\xi - a|}{\mu_r^{1/r}} > \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon^r}.$$

II.5.12. Пусть $M\xi = 0$, $M\xi^2 = \sigma^2$. Доказать, что

$$\text{а) } P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2} \text{ при } \varepsilon > 0;$$

$$\text{б) } P\{\xi < \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2} \text{ при } \varepsilon < 0.$$

II.5.13. Пусть $M\xi = a$, $M[\xi - a]^2 = \sigma^2$. Доказать, что:

а) $P\{\xi - a > \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$ при $\varepsilon > 0$;

б) $P\{\xi - a < \varepsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$ при $\varepsilon < 0$

(неравенства Кантелли).

II.5.14. Пусть (ξ_1, ξ_2) — случайный вектор, для которого $M\xi_i = a_i$, $D\xi_i = \sigma_i^2$ ($i = 1, 2$) и коэффициент корреляции ξ_1 и ξ_2 равен r . Доказать, что

$$P\left\{\max\left(\frac{|\xi_1 - a_1|}{\sigma_1}, \frac{|\xi_2 - a_2|}{\sigma_2}\right) \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{\varepsilon^2}.$$

II.5.15. Доказать, что:

а) при $x > 0$ $\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy \leq \frac{1}{x} e^{-\frac{x^2}{2}}$;

б) если ξ нормально распределенная случайная величина ($M\xi = a$, $D\xi = \sigma^2$), то

$$P\{|\xi - a| > \varepsilon\sigma\} \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}}.$$

II.5.16. Пусть ξ — нормально распределенная случайная величина $N(a, \sigma^2)$. Оценить вероятность неравенства

$$P\{|\xi - a| > 3\sigma\}.$$

II.5.17. Доказать, что:

а) $P\{|\xi_1 + \xi_2| > \varepsilon\} \leq P\left\{|\xi_1| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|\xi_2| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}$;

б) $P\left\{\left|\sum_{k=1}^m \xi_k\right| > \varepsilon\right\} \leq \sum_{k=1}^m P\left\{|\xi_k| > \frac{\varepsilon}{m}\right\}.$

II.5.18. Если g — выпуклая кверху функция и существует $M\xi$, то $Mg(\xi) \leq g(M\xi)$. Если g — выпуклая книзу, то $g(M\xi) \leq Mg(\xi)$. Доказать эти утверждения.

II.5.19. Если ξ и η — произвольные случайные величины, для которых $M\xi^2 < \infty$ и $M\eta^2 < \infty$, то существует $M\xi\eta$ и

$$(M\xi\eta)^2 \leq M\xi^2 M\eta^2.$$

Доказать это.

II.5.20. Если ξ и η — произвольные случайные величины, а числа $p > 1$ и $q > 1$ таковы, что $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, то

$$M|\xi\eta| \leq (M|\xi|^p)^{1/p} (M|\eta|^q)^{1/q}.$$

Доказать это.

II.5.21. Доказать, что для любой случайной величины ξ функция $u(t) = \ln M|\xi|^t$, $t \geq 0$ выпукла по t в любом интервале, где она конечна.

II.5.22. Пусть ξ — случайная величина и $M\xi = 0$. Назовем

$\tau(\xi) = \sup_{y>0} \sqrt{\frac{1}{2y^2} \ln M \exp 2y\xi}$ — положительным нормальным смещением случайной величины ξ ;

$\tau^*(\xi) = \sup_{y>0} \sqrt{\frac{1}{2y^2} \ln M \operatorname{ch} 2y\xi}$ — нормальным смещением случайной величины ξ .

Если $\tau^*(\xi) < \infty$, то ξ называется субгауссовской. Доказать, что: а) для симметричных случайных величин $\tau^*(\xi) = \tau(\xi)$; б) для нормальной $N(0, \sigma^2)$ случайной величины $\tau(\xi) = \sigma$; в) если $\lambda > 0$, то $\tau(\lambda\xi) = \lambda\tau(\xi)$, г) при $x \geq 0$

$$P\{\xi > x\} \leq e^{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}}.$$

II.5.23. Пусть ξ_1, ξ_2 — субгауссовские симметричные случайные величины. Доказать, что $\eta = \xi_1 + \xi_2$ — субгауссовская случайная величина.

§ 6. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ И УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ

Пусть $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$ — вероятностное пространство, \mathfrak{B} — σ -алгебра $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{M}$.

Условной вероятностью события A относительно σ -алгебры \mathfrak{B} называется случайная величина $P(A/\mathfrak{B})$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $P(A/\mathfrak{B})$ есть \mathfrak{B} -измеримая функция на Ω ;
- 2) для каждого события $B \in \mathfrak{B}$ справедливо равенство

$$P(A \cap B) = \int_B P(A/\mathfrak{B}) P(d\omega). \quad (1)$$

Для заданного множества A по теореме Радона — Никодима существует класс случайных величин, удовлетворяющих условиям 1) и 2). Однако, если величины $P'(A/\mathfrak{B})$ и $P''(A/\mathfrak{B})$ удовлетворяют условиям 1) и 2), то

$$P\{P'(A/\mathfrak{B}) = P''(A/\mathfrak{B})\} = 1.$$

Таким образом, при определении условной вероятности приходится иметь дело с классом случайных величин, каждые две из которых совпадают с вероятностью 1. Далее в качестве $P(A/\mathfrak{B})$ рассматривается некоторый представитель этого класса. Это замечание относится также к определению условного математического ожидания, которое приводится ниже.

Все рассматриваемые в этом параграфе случайные величины являются действительными.

Пусть $B \in \mathfrak{U}$ — событие с $P(B) > 0$, условная вероятность события $A \in \mathfrak{U}$ относительно события B есть число

$$\tilde{P}(A) = P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Отметим, что

$$P\{P(A/B) = P(A/\mathfrak{B})\} = 1, \mathfrak{B} = \{\emptyset, B, \bar{B}, \Omega\}.$$

Как функция события A $\tilde{P}(A)$ есть вероятность на \mathfrak{U} . Таким образом, имеем новое вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{U}, \tilde{P})$. Пусть ξ — случайная величина такая, что $M|\xi| < \infty$. Определенная для каждого действительного числа x функция

$$F_B(x) = \tilde{P}(\xi < x) = P\{\xi < x/B\}$$

есть по определению условная функция распределения случайной величины ξ при условии B ; величина

$$\tilde{M}\xi = M(\xi/B) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_B(x)$$

называется *условным математическим ожиданием* случайной величины ξ при условии B . Для борелевской функции $f(x)$, $x \in R$ с

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dF_B(x) < \infty$$

справедливо равенство

$$\tilde{M}(f(\xi)) = M(f(\xi)/B) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_B(x).$$

Более общее определение условного математического ожидания охватывает также случай некоторых событий вероятности 0 и состоит в следующем:

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ относительно σ -алгебры \mathfrak{B} называется случайная величина $M(\xi/\mathfrak{B})$, удовлетворяющая условиям:

- 1) $M(\xi/\mathfrak{B})$ есть \mathfrak{B} -измеримой функцией на Ω ;
- 2) для каждого множества $B \in \mathfrak{B}$ справедливо равенство

$$\int_B \xi(\omega) P(d\omega) = \int_B M(\xi/\mathfrak{B}) P(d\omega). \quad (2)$$

Условная вероятность $P(A/\mathfrak{B})$ является частным случаем условного математического ожидания, именно

$$P(A/\mathfrak{B}) = M(\kappa_A/\mathfrak{B}),$$

где κ_A — индикатор множества A .

Условная вероятность события A и условное математическое ожидание случайной величины η относительно случайной величины ξ определяются соответственно как условная вероятность события A и условное математическое ожидание случайной величины η относительно σ -алгебры, порожденной величиной ξ .

Пусть $\{\eta_t, t \in T\}$ — некоторое семейство случайных величин и \mathfrak{B} есть σ -алгебра, порождаемая этим семейством. Условное математическое ожидание случайной величины ξ относительно совокупности $\{\eta_t, t \in T\}$ определяется как $M(\xi/\mathfrak{B})$ и обозначается символом

$$M(\xi/\eta_t, t \in T).$$

II.6.1. Определить $M(\xi/\mathfrak{B})$ в случаях: а) $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$, б) $\mathfrak{B} = \{\emptyset, \Omega\}$, в) $\mathfrak{B} = \{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$, $1 > P(A) > 0$. Доказать, что для \mathfrak{B} -измеримой случайной величины ξ справедливо равенство с вероятностью 1

$$M(\xi/\mathfrak{B}) = \xi,$$

в частности, для постоянной c с вероятностью 1

$$M(c/\mathfrak{B}) = c.$$

II.6.2. Случайная величина η принимает конечное число значений x_1, x_2, \dots, x_n , причем $P\{\eta = x_k\} > 0$, $1 \leq k \leq n$. Определить $P(A/\eta)$ и $M(\xi/\eta)$ для случайной величины ξ с $M|\xi| < \infty$.

II.6.3. Пусть $\Omega = [0, 1]$, \mathfrak{A} — σ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств $[0, 1]$, P — мера Лебега на Ω . Пусть $B_1 = [0, a_1]$, $B_2 = (a_1, a_2]$, \dots , $B_n = (a_{n-1}, 1]$, где $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < 1$ — фиксированные числа, \mathfrak{B} — наименьшая σ -алгебра, содержащая множества $B_1, B_2,$

\dots, B_n , η — случайная величина, $\eta = c_1 \chi_{B_1} + \dots + c_n \chi_{B_n}$, где c_1, c_2, \dots, c_n — фиксированные числа. Определить $P(A/B_k)$, $1 \leq k \leq n$, $P(A/\mathfrak{B})$, $M(\xi/\eta)$ для случайной величины ξ с $M|\xi| < \infty$.

П.6.4. Случайная величина ξ имеет положительную плотность распределения вероятностей f и существует $M\xi$. Пусть \mathfrak{B}_1 — σ -алгебра борелевских множеств A таких, что из включения $x \in A$ следует включение $x + k \in A$ для любого целого k , а \mathfrak{B}_2 есть σ -алгебра борелевских множеств, симметричных относительно точки 0. Найти условные математические ожидания $M(\xi/\mathfrak{B}_1)$ и $M(\xi/\mathfrak{B}_2)$.

П.6.5. Доказать, что с вероятностью 1 выполняются соотношения:

- а) $M(\xi/\mathfrak{B}) \geq 0$, если $P\{\xi \geq 0\} = 1$;
- б) $M(\xi/\mathfrak{B}) \geq M(\eta/\mathfrak{B})$, если $P\{\xi \geq \eta\} = 1$ и $M\xi, M\eta$ существуют;
- в) $|M(\xi/\mathfrak{B})| \leq M(|\xi|/\mathfrak{B})$, если $M|\xi| < \infty$;
- г) $M(a\xi + b\eta/\mathfrak{B}) = aM(\xi/\mathfrak{B}) + bM(\eta/\mathfrak{B})$, где a, b — действительные числа.

П.6.6. Доказать, что $M[M(\xi/\mathfrak{B})] = M\xi$.

П.6.7. Случайная величина ξ и σ -алгебра \mathfrak{B} независимы, т. е. $P\{(\xi < c) \cap B\} = P(\xi < c) \cdot P(B)$ для любых действительного c и события $B \in \mathfrak{B}$. Доказать, что с вероятностью 1

$$M(\xi/\mathfrak{B}) = M\xi.$$

П.6.8. Две σ -алгебры \mathfrak{B}_1 и \mathfrak{B}_2 независимы тогда и только тогда, когда для каждой \mathfrak{B}_1 -измеримой величины ξ , такой, что $P\{\xi \geq 0\} = 1$, с вероятностью 1 справедливо равенство

$$M(\xi/\mathfrak{B}_2) = M\xi.$$

П.6.9. Если $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$, то с вероятностью 1

$$M[M(\xi/\mathfrak{B}_2)/\mathfrak{B}_1] = M(\xi/\mathfrak{B}_1).$$

П.6.10. Случайные величины ξ и η таковы, что $M|\sqrt{\xi\eta}| < \infty$ и $M|\eta| < \infty$ и величина ξ есть \mathfrak{B} -измерима. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$M(\xi\eta/\mathfrak{B}) = \xi M(\eta/\mathfrak{B}).$$

II.6.11. Пусть $\mathfrak{F}_1 \subset \mathfrak{F}_2$, ξ и η — случайные величины такие, что $M(\xi\eta)$ существует и ξ \mathfrak{F}_2 -измерима. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$M(\xi\eta/\mathfrak{F}_1) = M[\xi M(\eta/\mathfrak{F}_2)/\mathfrak{F}_1].$$

II.6.12. Пусть ξ — случайная величина с $M|\xi| < \infty$. Доказать, что условное математическое ожидание $M(\xi/\mathfrak{F})$ можно определить как \mathfrak{F} -измеримую величину ζ , для которой равно

$$M\xi\eta = M\zeta\eta$$

выполняется для любой \mathfrak{F} -измеримой и ограниченной с вероятностью 1 величины η .

II.6.13. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин таких, что $P\{\xi_1 \geq 0\} = 1$, $P\{\xi_{n+1} \geq \xi_n\} = 1$, $n \geq 1$. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi_n/\mathfrak{F}) = M(\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n/\mathfrak{F}).$$

II.6.14. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин таких, что $P\{|\xi_n| \leq \eta\} = 1$, $n \geq 1$ для некоторой величины η с $M|\eta| < \infty$ и $P\{\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty\} = 1$ для некоторой величины ξ . Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\{\xi_n/\mathfrak{F}\} = M(\xi/\mathfrak{F}).$$

II.6.15. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин таких, что $P\{\xi_n \leq \xi\} = 1$, $n \geq 1$, где ξ — некоторая случайная величина с $M|\xi| < \infty$. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо соотношение

$$M(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n/\mathfrak{F}) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} M(\xi_n/\mathfrak{F}).$$

Аналогично, если $P\{\xi_n \geq \eta\} = 1$, $n \geq 1$, с величиной η , $M|\eta| < \infty$, то с вероятностью 1 справедливо соотношение

$$M(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n/\mathfrak{F}) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} M(\xi_n/\mathfrak{F}).$$

II.6.16. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, причем $P\{\xi_n \geq 0\} = 1, n \geq 1$. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$M\left(\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n / \mathfrak{F}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} M(\xi_n / \mathfrak{F}).$$

II.6.17. Пусть f — действительная борелевская функция на плоскости, а ξ и η — случайные величины, причем ξ \mathfrak{F} -измерима относительно некоторой σ -алгебры \mathfrak{F} и $M|f(\xi, \eta)| < \infty$. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$M[f(\xi, \eta) / \mathfrak{F}] = M[f(x, \eta) / \mathfrak{F}]|_{x=\xi}.$$

II.6.18. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, \mathfrak{F} — σ -алгебра, порождаемая η , а f — действительная борелевская функция в плоскости такая, что $M|f(\xi, \eta)| < \infty$. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$M[f(\xi, \eta) / \mathfrak{F}] = [Mf(\xi, y)]|_{y=\eta}.$$

II.6.19. Доказать формулу полной вероятности

$$P(A) = \int_{\mathfrak{F}} P(A / \mathfrak{F}) P(d\omega) = MP(A / \mathfrak{F}).$$

II.6.20. Доказать, что с вероятностью 1 справедливы соотношения:

- а) $0 \leq P(A / \mathfrak{F}) \leq 1$;
- б) $P(A / \mathfrak{F}) = 0$, если $P(A) = 0$;
- в) $P(A / \mathfrak{F}) = 1$, если $P(A) = 1$;
- г) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n / \mathfrak{F}) = P(A / \mathfrak{F})$, если $A_n \subset A_{n+1}, n \geq 1, A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, либо если $A_n \supset A_{n+1}, n \geq 1, A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$;
- д) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n / \mathfrak{F}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n / \mathfrak{F})$, если $A_k \cap A_j = \emptyset, k \neq j$.

Условная вероятность $P(A / \mathfrak{F}) = P(A / \mathfrak{F})(\omega)$ есть функция события $A \in \mathfrak{A}$ и элементарного события $\omega \in \Omega$. Доказать, что равенство д) не означает, что $P(A / \mathfrak{F})$ σ -аддитивна по A при фиксированном ω .

II.6.21. Если событие A и σ -алгебра \mathfrak{B} независимы, т. е. $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \cdot \mathbf{P}(B)$ для $B \in \mathfrak{B}$, то с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\mathbf{P}(A/\mathfrak{B}) = \mathbf{P}(A).$$

II.6.22. Пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ — прямая R с σ -алгеброй \mathfrak{A} борелевских множеств, причем $\mathbf{P}(A) = \int_A f(x) dx$, $A \in \mathfrak{A}$, где f — непрерывная положительная функция, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Пусть \mathfrak{B}_1 — σ -алгебра множеств вида

$$\{x : \sin x \in B\}, \quad B \in \mathfrak{A}$$

и \mathfrak{B}_2 — σ -алгебра множеств вида

$$\{x : g(x) \in B\}, \quad B \in \mathfrak{A},$$

где g — кусочно монотонная функция. Найти $\mathbf{P}(A/\mathfrak{B}_1)$ и $\mathbf{P}(A/\mathfrak{B}_2)$, $A \in \mathfrak{A}$.

II.6.23. Пусть \mathfrak{B}_1 и \mathfrak{B}_2 — σ -алгебры, $\mathfrak{B}_1 \subset \mathfrak{B}_2$. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\mathbf{M}[\mathbf{P}(A/\mathfrak{B}_2)/\mathfrak{B}_1] = \mathbf{P}(A/\mathfrak{B}_1).$$

II.6.24. Случайная величина ξ и событие A с $\mathbf{P}(A) > 0$ — независимы. Доказать, что:

$$\text{а) } F_A(x) = F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\},$$

где $x \in \mathbf{R}$, F_A — условная функция распределения величины ξ при условии A .

$$\text{б) } \mathbf{M}(\xi/A) = \mathbf{M}\xi, \text{ если дополнительно } \mathbf{M}_1|\xi| < \infty.$$

II.6.25. Для случайной величины ξ с $\mathbf{M}|\xi| < \infty$ и события A с $\mathbf{P}(A) > 0$ доказать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| dF_A(x) < +\infty.$$

II.6.26. При условиях предыдущей задачи доказать равенство

$$\mathbf{M}(\xi/A) = \frac{1}{\mathbf{P}(A)} \cdot \int_A \xi(\omega) \mathbf{P}(d\omega).$$

II.6.27. При условиях задачи II.6.25 доказать неравенства

$$|\mathbf{M}(\xi/A)| \leq \mathbf{M}(|\xi|/A) \leq \frac{\mathbf{M}|\xi|}{\mathbf{P}(A)}.$$

П.6.28. Величина ξ имеет положительную плотность распределения вероятностей f и $M|\xi| < \infty$. Найти математические ожидания

$$M\{\xi/(\xi > 0)\}, M\{\xi/(a \leq \xi \leq b)\}.$$

П.6.29. Пусть \mathfrak{B} — σ -алгебра, порождаемая полной группой событий $\{B_n, n \geq 1\}$: $B_j \cap B_k = \emptyset, j \neq k$; $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$; $P(B_n) > 0, n \geq 1$. Доказать, что для случайной величины ξ с $M|\xi| < \infty$ с вероятностью 1 справедливо равенство:

$$M(\xi/\mathfrak{B}) = \sum_{n=1}^{\infty} M(\xi/B_n) \chi_{B_n},$$

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} M(\xi/B_n) P(B_n).$$

П.6.30. Пусть $\nu, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые случайные величины, причем ν принимает только целые положительные значения и $M\nu < \infty$, величины $\{\xi_n, n \geq 1\}$ имеют одинаковое распределение и $M|\xi_1| < \infty$. Доказать равенство

$$M(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu) = M\nu \cdot M\xi_1.$$

П.6.31. Пусть $\{\tau_n, n \geq 1\}$ и $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — независимые последовательности независимых и одинаково распределенных в каждой последовательности случайных величин, причем τ_1 имеет показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, $M\xi_1 = m$, $M(\xi_1 - m)^2 = \sigma^2 < \infty$. Для каждого $t \geq 0$ определим случайную величину $\xi(t)$, положив $\xi(t) = \xi_k$ для

$$\sum_{j=0}^{k-1} \tau_j \leq t < \sum_{j=0}^k \tau_j, \tau_0 = 0.$$

Вычислить

$$m(t) = M\xi(t),$$

$$r(s, t) = M[\xi(t) - m(t)][\xi(s) - m(s)], s, t \geq 0.$$

П.6.32. Пусть ξ — случайная величина с $M|\xi| < \infty$, а η — случайная величина, принимающая только значения $y_n, n \geq 1$, причем $P\{\eta = y_n\} > 0, n \geq 1$. Вычислить $M(\xi/\eta)$.

II.6.33. Пусть \mathfrak{B} — σ -алгебра, порождаемая полной группой событий B_n , $n \geq 1$ (см. задачу II.6.29). Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$P(A/\mathfrak{B}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A/B_n) \chi_{B_n}, \quad A \in \mathfrak{A}.$$

II.6.34. Пусть f — действительная непрерывная выпуклая вниз на оси функция. Пусть $M|\xi| < \infty$ и $M|f(\xi)| < \infty$. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо неравенство Йенсена

$$f(M(\xi/\mathfrak{B})) \leq M[f(\xi)/\mathfrak{B}].$$

II.6.35. Пусть ξ — случайная величина такая, что для некоторого $r \geq 1$ $M|\xi|^r < \infty$. Доказать неравенство

$$M|M(\xi/\mathfrak{B})|^r \leq M|\xi|^r.$$

II.6.36. Пусть ξ — случайная величина такая, что для некоторого $r \geq 1$ $M|\xi|^r < \infty$, \mathfrak{M} — семейство всех σ -алгебр \mathfrak{B} таких, что $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$. Доказать, что семейство случайных величин $\{|M(\xi/\mathfrak{B})|^r, \mathfrak{B} \in \mathfrak{M}\}$ является равномерно интегрируемым, т. е.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{\mathfrak{B} \in \mathfrak{M}} \int_{|M(\xi/\mathfrak{B})|^r > a} |M(\xi/\mathfrak{B})|^r P(d\omega) = 0.$$

II.6.37. Для случайной величины ξ с $M\xi^2 < \infty$ положим

$$D(\xi/\mathfrak{B}) = M\{[\xi - M(\xi/\mathfrak{B})]^2/\mathfrak{B}\}.$$

Доказать равенство

$$D(\xi) = MD(\xi/\mathfrak{B}) + D(M(\xi/\mathfrak{B})).$$

II.6.38. Для случайных величин ξ и η с $M\xi^2 < \infty$, $M\eta^2 < \infty$ доказать равенство

$$M[\xi M(\eta/\mathfrak{B})] = M[\eta M(\xi/\mathfrak{B})].$$

II.6.39. Пусть ξ — случайная величина с $M\xi^2 < \infty$, \mathfrak{B} — некоторая σ -алгебра, \mathfrak{M} — семейство всех \mathfrak{B} -измеримых величин η с $M\eta^2 < \infty$. Доказать, что

$$\inf_{\eta \in \mathfrak{M}} M(\xi - \eta)^2 = M[\xi - M(\xi/\mathfrak{B})]^2.$$

II.6.40. Пусть ξ, η — случайные величины, причем $M\xi^2 < \infty$. Доказать, что для любой действительной борелевской функции f на оси выполняется неравенство

$$M[\xi - f(\eta)]^2 \geq M[\xi - M[\xi/\eta]]^2.$$

II.6.41. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится в среднем порядка $r \geq 1$ к случайной величине ξ , т. е. $M|\xi_n|^r < \infty, M|\xi|^r < \infty, n \geq 1; M|\xi - \xi_n|^r \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Доказать, что последовательность $\{M(\xi_n/\mathfrak{F}), n \geq 1\}$ сходится в среднем порядка r к $M(\xi/\mathfrak{F})$.

II.6.42. Предположим, что $\Omega = R^m, \mathfrak{A}$ — σ -алгебра борелевских подмножеств R^m , а вероятность P на \mathfrak{A} задается функцией распределения $F(x_1, \dots, x_m)$, симметричной относительно своих аргументов. Множество $A \in \mathfrak{A}$ называется симметричным, если вместе с точкой $(x_1, x_2, \dots, x_m) \in A$ точка $(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}) \in A$ для произвольной подстановки k_1, k_2, \dots, k_m чисел $1, 2, \dots, m$.

Доказать, что совокупность \mathfrak{B} всех симметричных множеств есть σ -алгебра.

Пусть φ — действительная борелевская функция на R^m с $M|\varphi| < \infty$. Вычислить $M(\varphi/\mathfrak{B})$. Рассмотреть примеры:

а) $\varphi(x_1, \dots, x_m) = x_1$, б) $\varphi(x_1, \dots, x_m) = x_1^2 - x_1 x_2$.

II.6.43. Дополнительно к условиям задачи II.6.42 предположим, что $M\varphi^2 < \infty$. Доказать неравенство

$$M[M(\varphi/\mathfrak{B})]^2 \leq M\varphi^2.$$

II.6.44. Пусть ξ, η — случайные величины, причем $M|\xi| < \infty, \mathfrak{B}$ — σ -алгебра, порождаемая величиной η . Доказать, что для \mathfrak{B} -измеримой величины ξ , например, для функций от η , с вероятностью 1 справедливо равенство $M(\xi/\eta) = \xi$.

II.6.45. Если случайные величины ξ, η — независимы и $M|\xi| < \infty$, то с вероятностью 1 справедливо равенство

$$M(\xi/\eta) = M\xi.$$

II.6.46. Доказать, что для любых последовательностей случайных величин $\{\eta_n, n \geq 1\}$, борелевских функций $\{g_n\}$ и случайной величины ξ с $M|\xi| < \infty$ с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} M[M(\xi/\eta_n, n \geq 1)/g_n(\eta_1, \dots, \eta_n), n \geq 1] &= \\ &= M(\xi/g_n(\eta_1, \dots, \eta_n), n \geq 1). \end{aligned}$$

II.6.47. Величины ξ_k , $1 \leq k \leq n$ — независимы, имеют одинаковое распределение и $M|\xi_1| < \infty$. Пусть $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$. Доказать, что для каждого k , $1 \leq k \leq n$ с вероятностью 1 справедливо равенство

$$M(\xi_k / \bar{\xi}) = \bar{\xi}.$$

II.6.48. Пусть ξ , η — случайные величины, причем $M|\xi| < \infty$. Для борелевского множества $A \subset R$ определим функцию

$$v(A) = \int_{\{\eta \in A\}} \xi P(d\omega).$$

Доказать, что v — заряд, т. е. разность двух конечных мер на σ -алгебре S борелевских множеств R .

Пусть $F(A)$, $A \in S$ — мера Лебега—Стилтьеса, порождаемая функцией распределения величины η , $F(x) = P\{\eta < x\}$.

Доказать, что $v \ll F$. Таким образом, существует борелевская функция g на R , для которой

$$v(A) = \int_A g(y) dF(y), \quad A \in S.$$

Величина $g(y)$ называется условным математическим ожиданием величины ξ при условии $\eta = y$ и обозначается символом $M(\xi/\eta = y)$.

II.6.49. Доказать, что: а) $M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} M(\xi/\eta = y) dF(y)$;

б) с вероятностью 1 $g(\eta) = M(\xi/\eta)$.

II.6.50. Для события $A \in \mathfrak{A}$ положим $P(A/\eta = y) = M(\chi_A/\eta = y)$ (см. задачу II.6.48). Пусть случайные величины имеют непрерывную совместную плотность распределения вероятностей f , причем

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx > 0, \quad y \in R; \quad M|\xi| < \infty.$$

Доказать, что:

$$M(\xi/\eta = y) = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx.$$

$$P\{\xi < x/\eta = y\} = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^x f(u, y) du.$$

Функция

$$\frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^x f(u, y) du, \quad x \in R$$

называется *условной функцией распределения* величины ξ при условии $\eta = y$, функция

$$\frac{1}{f_2(y)} f(x, y) = f(x/y), \quad x \in R$$

— *условной плотностью распределения* величины ξ при условии $\eta = y$.

II.6.51. При условии задачи II.6.50 для $\Delta y > 0$ вычислить:

- а) $M(\xi/y - \Delta y \leq \eta < y + \Delta y)$,
- б) $P(\xi < x/y - \Delta y \leq \eta < y + \Delta y)$;

и доказать, что

$$\text{в) } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} M(\xi/y - \Delta y \leq \eta < y + \Delta y) = M(\xi/\eta = y),$$

$$\text{г) } \lim_{\Delta y \rightarrow 0} P(\xi < x/y - \Delta y \leq \eta < y + \Delta y) = P(\xi < x/\eta = y).$$

II.6.52. При условии задачи II.6.50 доказать равенство

$$P\{\xi \in A, \eta \in B\} = \int_A \left\{ \int_B f(u/v) f_2(v) dv \right\} du.$$

II.6.53. При условии задачи II.6.50 вычислить

$$M(\xi/\xi + \eta \in A),$$

где A — борелевское множество на R .

II.6.54. Случайные величины ξ, η — независимы и каждая имеет нормальное распределение со средним 0 и дисперсией 1. Пусть ρ, φ — полярные координаты точки (ξ, η) ; $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi$. Доказать, что

$$P\{\varphi < \tau/\rho = r\} = \frac{\tau}{2\pi}, \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi; \quad r > 0.$$

П.6.55. Случайная величина ξ_1 имеет равномерное распределение на $[0, 1]$. Если $\xi_1 = x_1$, то ξ_2 — случайная величина, равномерно распределенная на $[x_1, x_1 + 1]$. Если $\xi_2 = x_2$, то ξ_3 — величина, равномерно распределенная на $[x_2, x_2 + 1]$. Аналогично определяются величины $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ при всех $n \geq 2$. Вычислить $M\xi_n$.

П.6.56. Случайная величина ξ_1 равномерно распределена на $[0, 1]$. Если $\xi_1 = x_1$, то ξ_2 — величина, равномерно распределенная на $[x_1, 1]$. Если $\xi_2 = x_2$, то ξ_3 — величина, равномерно распределенная на $[x_2, 1]$. Аналогично определяются величины $\xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n$ при целом $n \geq 2$. Вычислить $M\xi_n$.

П.6.57. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и каждая из них имеет равномерное распределение на

отрезке $[0, 2a]$, $a > 0$. Пусть $\bar{\xi} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$. Доказать, что:

а) $M\xi_k = M\bar{\xi} = a$;

б) $M(\bar{\xi} / \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k) = \frac{1}{2} \frac{n+1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$.

П.6.58. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы и каждая из них имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 1]$, $\xi_1^* \leq \xi_2^* \leq \dots \leq \xi_n^*$ — эти величины, упорядоченные в неубывающем порядке. Доказать, что условная плотность распределения величин $\xi_1^*, \xi_2^*, \dots, \xi_{n-1}^*$ при условии $\xi_n^* = y$ равна

$$f(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}/y) = \begin{cases} \frac{(n-1)!}{y^{n-1}}, & 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < y, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

П.6.59. Величины ξ и η имеют совместное нормальное распределение с плотностью

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left[\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1} \right)^2 - 2\rho \frac{x-m_1}{\sigma_1} \cdot \frac{y-m_2}{\sigma_2} + \left(\frac{y-m_2}{\sigma_2} \right)^2 \right] \right\},$$

$$m_1, m_2 \in \mathbf{R}, \sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, |\rho| \leq 1.$$

Доказать, что:

$$а) f(x/y) = \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi(1-\rho^2)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)} \left[x - m_1 - \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2) \right]^2 \right\};$$

$$б) M(\xi/\eta = y) = m_1 + \rho \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (y - m_2).$$

II.6.60. Пусть ξ, η — величины предыдущей задачи с $m_1 = m_2 = 0, \sigma_1 = \sigma_2 = 1$. Доказать равенства:

$$а) M(\xi^2/\eta^2 = y^2) = \frac{1}{2} [M(\xi^2/\eta = y) + M(\xi^2/\eta = -y)], y \geq 0;$$

$$б) M(\xi^2/\eta^2 = y^2) = 1 + \rho^2(y^2 - 1).$$

II.6.61. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, $\eta_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, n \geq 1$. Зафиксируем $n > 1$. Доказать, что при условии $\eta_n = y$ случайные величины η_k и η_m с фиксированными индексами $k < n < m$ независимы, т. е.

$$P\{\eta_k < x_1, \eta_m < x_2/\eta_n = y\} = P\{\eta_k < x_1/\eta_n = y\} \times \\ \times P\{\eta_m < x_2/\eta_n = y\}.$$

II.6.62. Для последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и некоторой σ -алгебры \mathfrak{B}

$$M(|\xi_n|/\mathfrak{B}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

по вероятности. Доказать, что $\xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по вероятности.

II.6.63. Пусть ξ — случайная величина с $M|\xi| < \infty, \{\mathfrak{B}_n, n \geq 1\}$ — последовательность σ -алгебр таких, что $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1} \subset \mathfrak{A}, n \geq 1$. Предположим, что $\alpha > 0$, а $m \geq 1$ — целое. С помощью соотношения

$$\left\{ \max_{1 \leq k \leq m} M(|\xi|/\mathfrak{B}_k) \geq \alpha \right\} = \bigcup_{k=1}^m \{M(|\xi|/\mathfrak{B}_j) < \alpha, \\ 1 \leq j < k; M(|\xi|/\mathfrak{B}_k) \geq \alpha\}$$

доказать неравенство

$$P\left\{ \max_{1 \leq k \leq m} M(|\xi|/\mathfrak{B}_k) \geq \alpha \right\} \leq \frac{M|\xi|}{\alpha}.$$

II.6.64. Преобразование $T: \Omega \rightarrow \Omega$ называется взаимно однозначным преобразованием, со-

храняющим вероятность, если T — взаимно однозначное преобразование Ω на Ω и переводит множества $A \in \mathfrak{A}$ в $TA \in \mathfrak{A}$ с $P(TA) = P(A)$, множество $A \in \mathfrak{A}$ называется инвариантным относительно преобразования T , если

$$P\{(A \setminus TA) \cup (TA \setminus A)\} = 0.$$

а) Доказать, что семейство всех инвариантных множеств есть σ -алгебра \mathfrak{B} .

б) Для случайной величины ξ определим $T\xi$ как $T\xi(\omega) = \xi(T^{-1}\omega)$. Проверить, что $M(T\xi) = M\xi$, если $M|\xi| < \infty$.

в) Положим

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k \xi, \quad n \geq 1.$$

Предположим, что $M|\xi| < \infty$, $M|\eta_n - \eta| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, для некоторой величины η с $M|\eta| < \infty$. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство $\eta = M(\xi/\mathfrak{B})$.

II.6.65. Пусть ξ — случайная величина с $M|\xi| < \infty$, $\{\mathfrak{B}_n, n \geq 1\}$ — последовательность σ -алгебр таких, что $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{B}_{n+1} \subset \mathfrak{A}$; $n \geq 1$. Доказать, что с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi/\mathfrak{B}_n) = M(\xi/\mathfrak{B}),$$

где \mathfrak{B} — наименьшая σ -алгебра, содержащая все \mathfrak{B}_n , $n \geq 1$.

Указание. При доказательстве использовать такие утверждения:

1) если ξ \mathfrak{B}_k -измерима для некоторого k , то с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi/\mathfrak{B}_n) = \xi;$$

2) если ξ \mathfrak{B} -измерима, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $k \geq 1$ и \mathfrak{B}_k -измеримая величина η такая, что

$$M|\xi - \eta| < \varepsilon;$$

3) неравенство задачи II.6.63.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§ 1. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ.

ЛЕММА БОРЕЛЯ — КАНТЕЛЛИ. ЗАКОН 0 И 1

Пусть $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ — вероятностное пространство; события и семейства событий, о которых идет речь далее, принадлежат \mathfrak{U} .

События A_1, A_2, \dots, A_n называются независимыми (или независимыми в совокупности), если для всех целых $1 \leq m \leq n$, $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$ выполняется равенство

$$P\left\{\bigcap_{k=1}^m A_{i_k}\right\} = \prod_{k=1}^m P(A_{i_k}).$$

Последовательность событий $\{A_n, n \geq 1\}$ называется последовательностью независимых событий, если произвольный конечный набор событий этой последовательности есть набор независимых событий.

Последовательность событий $\{A_n, n \geq 1\}$ называется последовательностью попарно независимых событий, если события A_k и A_n независимы при $m \neq k, k \geq 1, m \geq 1$.

Пусть $\{\mathfrak{B}_n, n \geq 1\}$ — последовательность σ -алгебр таких, что $\mathfrak{B}_n \subset \mathfrak{U}, n \geq 1$. Последовательность σ -алгебр $\{\mathfrak{B}_n, n \geq 1\}$ называется последовательностью попарно независимых σ -алгебр, если каждая последовательность событий $\{A_n, n \geq 1\}$ таких, что $A_n \in \mathfrak{B}_n, n \geq 1$, — последовательность независимых событий.

Пусть \mathfrak{U}_n минимальная σ -алгебра, включающая σ -алгебры \mathfrak{B}_m при $m \geq n$; σ -алгебра $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{U}_n$ и события из нее называются асимптотическими или остаточными относительно последовательности σ -алгебр $\{\mathfrak{B}_n, n \geq 1\}$.

Верхний предел последовательности событий $\{A_n, n \geq 1\}$ есть событие

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,$$

событие $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n$ происходит тогда и только тогда, когда происходит бесконечно много из событий $A_n, n \geq 1$.

Лемма Бореля—Кантелли. Пусть $\{A_n, n \geq 1\}$ — последовательность событий такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

Тогда

$$P(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n) = 0.$$

Если для последовательности независимых событий $\{A_n, n \geq 1\}$ расходитс я ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty,$$

то

$$P(\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} A_n) = 1.$$

Отметим, что лемма Бореля—Кантелли состоит из двух частей, причем первая часть относится к произвольной последовательности событий со сходящимся рядом вероятностей.

Закон 0 и 1 Колмогорова. Пусть $\{\mathfrak{A}_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых σ -алгебр и \mathfrak{B} — остаточная σ -алгебра относительно этой последовательности. Для любого события $A \in \mathfrak{B}$ вероятность $P(A)$ равна 0 или 1.

III.1.1. В каких случаях события A и B независимы, если: а) $A \subset B$, б) $A \cap B = \emptyset$, в) $A, B = \bar{A}$?

III.1.2. Пусть $\Omega = [0, 1]$, \mathfrak{A} — σ -алгебра подмножеств $[0, 1]$, измеримых по Лебегу, $P(A)$ — мера Лебега множества A . Какие из следующих наборов событий есть наборы независимых событий: а) $[0, \frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$; б) $[0; \frac{1}{2}]$, $[a, b]$; в) $A_1 = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$, $A_2 = [0, \frac{1}{4}] \cup [\frac{3}{4}, 1]$, $A_3 = [0, \frac{1}{2}]$?

III.1.3. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство предыдущей задачи. Проверить, что следующая последовательность есть последовательность независимых событий:

$$A_n = \bigcup_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left[\frac{2k}{2^n}, \frac{2k+1}{2^n} \right], n \geq 1.$$

III.1.4. События A_1, A_2, \dots, A_n независимы, $P(A_k) = p_k$, $1 \leq k \leq n$. Найти вероятности: а) что не произой-

дет ни одно из этих событий; б) что произойдет ровно m , $m \leq n$, из этих событий.

III.1.5. Рассмотрим последовательность независимых экспериментов, в каждом из которых некоторое событие — «успех» происходит с вероятностью p , а противоположное событие — «неудача» — с вероятностью $q = 1 - p$. Найти вероятность того, что серия из пяти последовательных «успехов» произойдет бесконечное число раз.

III.1.6. Пусть $\{A_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых событий. Обозначим через $B_k^{(m)} = A_k \cap A_{k+1} \cap \dots \cap A_{k+m}$.

а) Доказать, что для фиксированного m среди событий $B_k^{(m)}, k \geq 1$, происходит с вероятностью 1 бесконечно много событий тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \prod_{j=0}^m \mathbf{P}(A_{k+j}) = +\infty.$$

б) Предположим, что при каждом n справедливо равенство

$$\prod_{k=n}^{\infty} \mathbf{P}(A_k) = 0.$$

Тогда

$$\mathbf{P}\left\{\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k^{(m)}\right\} = \begin{cases} 1, & \text{если ряд условия а) расходится при} \\ & \text{всех } m, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

III.1.7. Пусть $\{A_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых событий, $\mathbf{P}(A_n) = p_n, n \geq 1$. Найти условие, при котором

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1.$$

Предположим далее, что это условие выполнено. Пусть ν — наименьший номер события из $A_n, n \geq 1$, которое произошло (ν определено с вероятностью 1). Найти распределение величины ν .

III.1.8. Пусть в условиях предыдущей задачи $p_n = p, n \geq 1, 0 < p < 1$. Тогда с вероятностью 1 происходит бесконечное число событий из $A_n, n \geq 1$. Обозначим через

$v_1 < v_2 < \dots < v_k < \dots$ — натуральные числа такие, что в последовательности $\{A_n, n \geq 1\}$ произошли только события с номерами $v_1, v_2, \dots, v_k, \dots$. Доказать, что:

а) при любом k распределение величины $v_{k+1} - v_k$ совпадает с распределением величины v_1 ;

б) события $B_k^{(m_k)} = \{v_{k+1} - v_k = m_k\}, k \geq 1$ — независимы для любой последовательности натуральных чисел $\{m_k, k \geq 1\}$.

III.1.9. Последовательность событий $\{A_n, n \geq 1\}$ такая, что для каждого события $A \in \mathfrak{A}$ с $P(A) > 0$ расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap A_n) = +\infty.$$

Доказать, что:

а) событие B , для которого $P(B \cap A_k) = 0$ для всех k , исключая конечное число значений, имеет вероятность 0.

б) $P\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\} = 1$.

III.1.10. Если для последовательности событий $\{A_n, n \geq 1\}$ существует событие $A \in \mathfrak{A}$ такое, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n \cap A) = +\infty,$$

то

$$P\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\} \leq 1 - P(A).$$

III.1.11. Последовательность независимых событий $\{A_n, n \geq 1\}$ такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty.$$

Какую вероятность может иметь событие A , для которого

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{A_n \cap A\} < \infty?$$

III.1.12. Пусть $\{A_n, n \geq 1\}$ — последовательность событий, для которых

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty,$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i, k=1}^n P\{A_i \cap A_k\}}{\left[\sum_{k=1}^n P(A_k)\right]^2} = 1.$$

Доказать, что: а) справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\sum_{k=1}^n \alpha_k - \sum_{k=1}^n P(A_k)\right| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(A_k)\right\} = 0,$$

α_n — индикатор A_n , $n \geq 1$;

б) использовать а) для доказательства равенства

$$P\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\} = 1$$

(это утверждение является обобщением леммы Бореля — Кантелли, принадлежащим П. Эрдешу и А. Реньи).

III.1.13. Пусть $\{A_n, n \geq 1\}$ — последовательность попарно независимых событий, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty.$$

Доказать, что

$$P\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\} = 1.$$

§ 2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ называется *последовательностью независимых случайных величин*, если для любой последовательности $\{x_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ последовательность $\{\{\xi_n < x_n\}, n \geq 1\}$ — последовательность независимых событий.

Это определение равносильно такому: последовательность случайных величин называется *последовательностью независимых случайных величин*, если каждый конечный набор величин из последовательности есть набор независимых случайных величин.

Минимальная σ -алгебра событий, содержащая для случайной величины ξ все события $\{\xi < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, называется σ -алгеброй, порожденной величиной ξ .

Минимальная σ -алгебра подмножеств n -мерного пространства \mathbb{R}^n , содержащая все множества вида

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : a_k \leq x_k < b_k, 1 \leq k \leq n\},$$

где $a_k \in \mathbb{R}$, $b_k \in \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$, называется борелевской σ -алгеброй в \mathbb{R}^n . Множества этой σ -алгебры называются борелевскими.

Действительная функция от n действительных переменных $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ называется борелевской, если она измерима относительно борелевской σ -алгебры, т. е. если при любом $a \in \mathbb{R}$ множество

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) : f(x_1, x_2, \dots, x_n) < a\}$$

является борелевским.

Пусть $\{x_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$. Определим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

как верхний предел последовательности $\{x_n, n \geq 1\}$, если эта последовательность ограничена сверху, и положим

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

в противном случае. Аналогично определяется

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

Для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ случайных величин будем рассматривать

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n,$$

которые являются случайными величинами. Например,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \begin{cases} +\infty, & \omega \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} \{\xi_k(\omega) > m\}, \\ \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega), & \omega \in \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} \{\xi_k(\omega) \leq m\}. \end{cases}$$

Эта величина измерима относительно \mathfrak{H} .

Множество

$$\{\omega : \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)\}$$

измеримо и есть множество сходимости последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$.

Если для последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и последовательности положительных чисел $\{c_n, n \geq 1\}$ для некоторого числа $a > 0$ с вероятностью 1 выполняется только конечное число событий из $\{|\xi_n| > ac_n\}$, $n \geq 1$, то говорят, что с вероятностью 1 справедливо соотношение

$$\xi_n = O(c_n), n \rightarrow \infty.$$

III.2.1. Доказать, что последовательность событий $\{A_n, n \geq 1\}$ есть последовательность независимых событий тогда и только тогда, когда $\{I_{A_n}, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин. Здесь I_A — индикатор A .

III.2.2. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин; \mathfrak{A}_n — σ -алгебра, порожденная величиной $\xi_n; n \geq 1$. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин тогда и только тогда, когда $\{\mathfrak{A}_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых σ -алгебр.

III.2.3. Если $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых величин, а

$$0 < n_1 < n_2 < \dots < n_m < \dots,$$

то $g_1(\xi_1, \dots, \xi_{n_1}), g_2(\xi_{n_1+1}, \dots, \xi_{n_2}), \dots,$

$$g_m(\xi_{n_{m-1}+1}, \dots, \xi_{n_m}), \dots,$$

где g_k — борелевская функция от $n_k - n_{k-1}$ переменных, $k \geq 2$, также образуют последовательность независимых величин. Доказать это утверждение.

III.2.4. Доказать, что для последовательности независимых случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ случайные величины

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k,$$

а в случае, когда, $P\{\xi_n > 0\} = 1, n \geq 1$, и величины

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \xi_k}, \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n \xi_k}$$

с вероятностью 1 постоянны (возможно принимают значение $+\infty$ или $-\infty$).

III.2.5. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин. Доказать, что: а) последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится с вероятностью 1 или расходится с вероятностью 1; б) предел последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ с вероятностью 1 есть постоянная величина;

в) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1 или с вероятностью 1 расходится.

III.2.6. Пусть $\{\xi_n, n \geq 0\}$ — последовательность независимых случайных величин. Доказать, что радиус сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \xi_n x^n$$

есть с вероятностью 1 постоянная величина.

III.2.7. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин. Доказать, что для случайного ряда Дирихле

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n^x}$$

существует такая постоянная σ ($-\infty \leq \sigma \leq +\infty$), что при $x > \sigma$ ряд сходится с вероятностью 1.

III.2.8. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, $\{a_n, n \geq 1\} \subset \mathbf{R}$, причем $a_n \leq a_{n+1}$, $n \geq 1$ и $a_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$. Доказать утверждения:

а) $\mathbf{P}\{\xi_n \geq a_n \text{ для бесконечного числа индексов}\} = \mathbf{P}\{\max_{1 \leq k \leq n} \xi_k \geq a_n \text{ для бесконечного числа значений } n\}$;

б) если $\mathbf{P}\{\xi_n \geq a_n \text{ для бесконечного числа значений } n\} = 0$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\max_{1 \leq k \leq n} \xi_k \geq a_n\} = 0.$$

III.2.9. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\mathbf{M}|\xi_1| = +\infty$. Доказать, что для каждого $c > 0$ с вероятностью 1 происходит бесконечно много событий из последовательности событий $\{|\xi_n| > cn\}$, $n \geq 1$.

III.2.10. Предположим, что $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{M}\xi_1 = 0$. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{n^{-1/\alpha} \xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} = 1, \alpha > 0,$$

тогда и только тогда, когда $\mathbf{M}|\xi_1|^\alpha < \infty$.

III.2.11. При условиях предыдущей задачи доказать, что

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\xi_n}{\ln n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\right\} = 1$$

тогда и только тогда, когда для любого $c > 0$ $\mathbf{M}e^{c|\xi_1|} < \infty$.

III.2.12. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих показательное распределение. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\xi_n = O(\ln n), n \rightarrow \infty\} = 1$$

III.2.13. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин с $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = 1$, $n \geq 1$. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{|\xi_n| = O(\sqrt{\ln n}), n \rightarrow \infty\} = 1.$$

III.2.14. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем $\mathbf{P}\{\xi_n = 0\} = \mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{2}$, $n \geq 1$. Определим случайную величину η равенством

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n}.$$

Доказать, что η равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

III.2.15. Каждый из последовательности независимых экспериментов приводит к появлению с вероятностью $\frac{1}{10}$ одной из цифр: 0, 1, 2, ..., 9. Пусть ξ_n — результат n -го эксперимента, а число η есть дробь $\eta = 0, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots$. Какова вероятность того, что число η рационально?

III.2.16. На отрезок $[0, 1]$ наудачу бросается точка, x — ее абсцисса. Рассмотрим десятичное разложение x : $x = 0, \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots$, если $x < 1$ (рассматриваются разложения, не имеющие цифры 9 в периоде). Доказать, что $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем

$$\mathbf{P}\{\xi_n = k\} = \frac{1}{10}, 0 \leq k \leq 9; n \geq 1.$$

III.2.17. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых одинаково распределенных с распределением Коши случайных величин. Для каждого $x > 0$ доказать равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k < x\right\} = e^{-\frac{1}{\pi x}}.$$

III.2.18. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность одинаково распределенных случайных величин с $M|\xi_1| < +\infty$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} M \{ \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| \} = 0.$$

Указание. $M|\xi| < \infty$ тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \{ |\xi| \geq n \} < \infty.$$

III.2.19. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2 < \infty.$$

Доказать, что

$$M \{ \sup_{n \geq 1} |\xi_n| \} < \infty.$$

Указание. Использовать равенство

$$M\xi = \int_0^{\infty} P \{ \xi \geq x \} dx$$

для величин ξ с $P \{ \xi \geq 0 \} = 1$.

III.2.20. Пусть $v, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, причем v принимает натуральные значения и $Mv^2 < \infty$, а $\xi_n, n \geq 1$, одинаково распределены и $M\xi_1^2 < \infty$. Вычислить математическое ожидание и дисперсию величины

$$S_v = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_v.$$

III.2.21. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных непрерывных случайных величин. Положим

$$v = \min \{ n : n \geq 2, \xi_n > \xi_1 \}.$$

Найти распределение v . Существует ли Mv ?

III.2.22. Для последовательности предыдущей задачи положим

$$v = \min \{ n : n > m, \xi_n > \max_{1 \leq k \leq m} \xi_k \}$$

Доказать, что $P \{ v > n \} = \frac{m}{n}$.

III.2.23. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих показательное распределение с параметром $\lambda > 0$, а

$$v = \min \{n : n \geq 1, \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n > 1\}.$$

Определить распределение v .

III.2.24. При условиях предыдущей задачи найти распределение ξ_v .

III.2.25. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин в $M\xi_1 > 0, M\xi_1^2 < +\infty$,

$$v = \min \{n : n \geq 1, \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n \geq 1\}.$$

Доказать, что при любом фиксированном $k \geq 1$ случайные величины ξ_v и ξ_{v+k} независимы. Найти распределение величины ξ_{v+k} .

III.2.26. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ независимы и равномерно распределены на $[0, 1]$. Пусть

$$v = \min \{n : n \geq 1, \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n > 1\}.$$

Доказать, что $Mv = e$.

III.2.27. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_1 = 0$ и $M\xi_1^{2r} < +\infty$ для некоторого целого $r > 0$. Доказать, что существует число $c(r)$ такое, что

$$M \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right)^{2r} \leq c(r) \cdot n^r, n \geq 1.$$

III.2.28. Предположим, что $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с функцией распределения вероятностей F каждая, а числа $\{a_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям:

$$0 = a_0 < a_n < a_{n+1}, n \geq 1; a_n + a_m \leq a_{n+m}, n, m \geq 1.$$

Если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|x| > a_n} dF(x) = +\infty, S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n,$$

то $P \{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{|S_n| > a_n\} \} = P \{|S_n| > a_n \text{ для бесконечного числа номеров } n\} = 1$.

Доказать это утверждение, сначала проверив, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{|x| > 2a_n} dF(x) = +\infty, \quad \mathbf{P}\left\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{|\xi_n| > 2a_n\}\right\} = 1.$$

III.2.29. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $\mathbf{M}|\xi_1| = +\infty$. Доказать, что выполняется хотя бы одно из соотношений:

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = +\infty\right\} = 1,$$

$$\mathbf{P}\left\{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = -\infty\right\} = 1.$$

III.2.30. Случайные величины $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимы и имеют распределение Коши. Доказать, что

$$\mathbf{P}\left\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = +\infty\right\} = 1.$$

Указание. Найти распределение $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$.

III.2.31. Для величин предыдущей задачи при любом $\alpha > 1$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^n \xi_k = 0\right\} = 1.$$

Доказать это утверждение.

III.2.32. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Доказать, что с вероятностью 1 множество чисел $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots\}$ всюду плотно на $[0, 1]$.

§ 3. ПОНЯТИЯ СХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство. Случайная величина ξ — действительная определенная на Ω функция, измеримая относительно σ -алгебры \mathfrak{A} . Далее рассматриваются также функции на Ω ,

принимающие для некоторых $\omega \in \Omega$ значения $+\infty$ или $-\infty$, при этом всегда предполагается, что множество всех таких ω измеримо и имеет вероятность 0.

Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ (обозначение

$$P\{\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty\} = 1 \text{ или } P\{\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = \xi\} = 1),$$

если множество всех тех точек $\omega \in \Omega$, для которых предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$ не существует или $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \neq \xi(\omega)$, имеет вероятность 0, т. е. если

$$P\{\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)\}\} = 1.$$

Сходимость с вероятностью 1 последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ есть сходимость почти всюду относительно меры P последовательности измеримых функций $\{\xi_n(\omega), \omega \in \Omega; n \geq 1\}$.

Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ , если для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Сходимость по вероятности последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ есть сходимость по мере P последовательности измеримых функций $\{\xi_n(\omega), \omega \in \Omega; n \geq 1\}$.

Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится в среднем порядка $r > 0$ к случайной величине ξ , если $M|\xi_n|^r < \infty, n \geq 1$; $M|\xi|^r < \infty$,

$$M|\xi_n - \xi|^r \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

В случае $r = 2$ эта сходимость называется сходимостью в среднем квадратическом.

Последовательность функций распределения вероятностей $\{F_n, n \geq 1\}$ слабо сходится к функции F , если $F_n(x) \rightarrow F(x), n \rightarrow \infty$, для каждого значения x , которое является точкой непрерывности функции F .

Если для последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ последовательность соответствующих функций распределения вероятностей $\{F_n, n \geq 1\}$ сходится слабо к функции распределения вероятностей F величины ξ , то говорят, что последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится к ξ по распределению.

Векторная случайная величина $\vec{\xi}$ со значениями в R^m есть упорядоченный набор из m действительных случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$.

Функция распределения вектора $\vec{\xi}$ есть совместная функция распределения величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$:

$$F(\vec{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_m) = P\{\xi_k < x_k, 1 \leq k \leq m\}.$$

Слабая сходимость функций распределения в R^m определяется аналогично одномерному случаю.

Слабая сходимость к функции распределения характеризуется такой теоремой:

Теорема. Для того, чтобы последовательность функций распределения $\{F_n, n \geq 1\}$ слабо сходилась к функции распределения F в R^m необходимо и достаточно, чтобы для любой действительной

ограниченной и непрерывной в \mathbb{R}^m функции g выполнялось равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^m} g(x_1, \dots, x_n) dF_n = \int_{\mathbb{R}^m} g(x_1, \dots, x_m) dF.$$

Определение сходимости по распределению в случае m -мерных случайных величин аналогично одномерному.

Последовательность m -мерных случайных величин $\{\vec{\xi}^{(n)}, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к m -мерной случайной величине $\vec{\xi}$, если сходится к 0 по вероятности последовательность действительных случайных величин $\{\|\vec{\xi}^{(n)} - \vec{\xi}\|, n \geq 1\}$ при $n \rightarrow \infty$. Здесь для

$$\vec{a} \in \mathbb{R}^m \quad \|\vec{a}\|^2 = \sum_{k=1}^m a_k^2.$$

Связь между разными понятиями сходимости случайных величин показана на схеме, где обозначение $A \rightarrow B$ означает, что из сходимости A следует сходимость B .



В общем случае, т. е. без специальных предположений о вероятностном пространстве или о последовательности случайных величин, имеют место только связи, указанные на схеме.

При изучении свойств последовательностей случайных величин часто оказывается полезной следующая теорема:

Теорема. Пусть последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ . Тогда существует подпоследовательность $\{\xi_{n(k)}, k \geq 1\}$, сходящаяся к ξ с вероятностью 1.

Кроме этой теоремы при решении задач полезны теорема Лебега об ограниченной сходимости, лемма Фату, неравенство Минковского.

III.3.1. Пусть $\xi, \xi_n, n \geq 1$ — случайные величины. Доказать, что множество всех тех точек $\omega \in \Omega$, для которых $\xi_n(\omega) \rightarrow \xi(\omega), n \rightarrow \infty$, является измеримым, т. е. событием из \mathfrak{A} .

III.3.2. Доказать, что для последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ множество всех тех точек $\omega \in \Omega$,

для которых последовательность $\{\xi_n(\omega), n \geq 1\}$ сходится, измеримо, т. е. принадлежит \mathfrak{A} .

III.3.3. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$P\{\overline{\lim_{n \rightarrow \infty}} \{\omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \varepsilon\}\} = 0.$$

III.3.4 Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\bigcup_{m=n}^{\infty} \{|\xi_m - \xi| \geq \varepsilon\}\right\} = 0.$$

III.3.5. Предположим, что для двух последовательностей случайных величин справедливы соотношения:

$$\begin{aligned} P\{\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty\} &= 1, \\ P\{\eta_n \rightarrow \eta, n \rightarrow \infty\} &= 1, \\ P\{\xi_n \neq \eta_n\} &= 0, n \geq 1. \end{aligned}$$

Доказать, что $P\{\xi = \eta\} = 1$.

III.3.6. Предположим, что

$$P\{\xi_n^{(k)} \rightarrow \xi^{(k)}, n \rightarrow \infty\} = 1, 1 \leq k \leq m;$$

g — действительная непрерывная функция на R^m . Доказать, что

$$P\{g(\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}, \dots, \xi_n^{(m)}) \rightarrow g(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(m)}), n \rightarrow \infty\} = 1.$$

III.3.7. Пусть $([0, 1], \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное пространство задачи III.1.2. Положим

$$\xi_n = I_{A_n}, n \geq 1;$$

$$A_n = \left[\frac{k}{2^m}, \frac{k+1}{2^m} \right], n = k + 2^m, k = 0, 1, \dots, 2^m - 1, m = 0, 1, 2, \dots$$

Доказать, что а) последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится к 0 по вероятности; б) последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ не сходится с вероятностью 1. Выделить из последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходящуюся с вероятностью 1 подпоследовательность.

III.3.8. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится с вероятностью 1 к некоторой случайной величине тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{m=1}^{\infty} \{ \omega : |\xi_{N+m}(\omega) - \xi_N(\omega)| \geq \varepsilon \} \right\} = 0.$$

III.3.9. Если для последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и случайной величины ξ для любого ε выполняется условие

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon \} < +\infty,$$

то

$$\mathbf{P} \{ \xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty \} = 1.$$

III.3.10. Если для последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ существует последовательность неотрицательных чисел $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ со сходящимся рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < +\infty$$

и такая, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ |\xi_{n+1} - \xi_n| > \varepsilon_n \} < +\infty,$$

то $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится с вероятностью 1 к некоторой случайной величине.

III.3.11. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин такая, что для некоторого $r > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} |\xi_n|^r < +\infty.$$

Доказать, что

$$\mathbf{P} \{ \xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \} = 1.$$

III.3.12. Доказать, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится с вероятностью 1 к случайной величине ξ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{m \geq n} |\xi_m - \xi| \geq \varepsilon \right\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty;$$

т. е. когда

$$\sup_{m \geq n} |\xi_n - \xi| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.3.13. Доказать, что сходящаяся с вероятностью 1 к случайной величине ξ последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится к ξ по вероятности.

III.3.14. Из сходимости по вероятности не следует сходимость с вероятностью 1. Построить пример.

III.3.15. Атомом вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ называется множество $A \in \mathfrak{A}$ с $P(A) > 0$ такое, что любое множество $B \subset A, B \in \mathfrak{A}$ имеет вероятность 0 или $P(A)$. Доказать, что:

а) если A и B — атомы, то либо $P(A) = P(B)$, либо $P(A \cap B) = 0$; таким образом, отбросив множества вероятности 0, можно считать, что атомы не пересекаются;

б) существует не более чем счетное семейство атомов, которые не пересекаются;

$$\text{в) } \Omega = A_0 + \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, \text{ где } A_n \cap A_m = \emptyset$$

при $n \neq m$, A_n — атом или пустое множество, $n \geq 1$, а множество A_0 обладает свойством: для любого числа $0 \leq p \leq P(A_0)$ существует $B \subset A_0, B \in \mathfrak{A}$ такое, что $P(B) = p$. Разложение Ω единственно с точностью до множеств вероятности 0.

III.3.16. Продолжение предыдущей задачи. Доказать, что:

а) каждая случайная величина с вероятностью 1 постоянна на каждом атоме;

б) если Ω есть объединение атомов, то из сходимости по вероятности последовательности случайных величин следует сходимость этой последовательности с вероятностью 1.

в) если в разложении $\Omega = A_0 + \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, P(A_0) > 0$, то из сходимости по вероятности не следует сходимость с вероятностью 1.

Таким образом, сходимость с вероятностью 1 и сходимость по вероятности на пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда Ω есть объединение атомов.

III.3.17. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин таких, что

$$P\{0 \leq \xi_{n+1} \leq \xi_n\} = 1, n \geq 1.$$

Доказать, что из сходимости $\xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по вероятности следует

$$P\{\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty\} = 1.$$

III.3.18. Доказать, что:

а) если

$$P\{\xi_n \rightarrow \xi', n \rightarrow \infty\} = 1, P\{\xi_n \rightarrow \xi'', n \rightarrow \infty\} = 1,$$

то

$$P\{\xi' \neq \xi''\} = 0.$$

б) если $\xi_n \rightarrow \xi', \xi_n \rightarrow \xi'', n \rightarrow \infty$, по вероятности, то $P\{\xi' = \xi''\} = 1$.

III.3.19. Доказать, что последовательность случайных величин сходится по вероятности к случайной величине ξ тогда и только тогда, когда каждая подпоследовательность $\{\xi_{n(k)}, k \geq 1\}$ содержит в себе подпоследовательность, которая сходится к ξ с вероятностью 1.

III.3.20. Рассмотрим k последовательностей случайных величин $\{\xi_n^{(j)}, n \geq 1\}, 1 \leq j \leq k$, причем при каждом $j, 1 \leq j \leq k: \xi_n^{(j)} \rightarrow \xi^{(j)}, n \rightarrow \infty$, по вероятности к некоторой случайной величине $\xi^{(j)}$. Пусть g — действительная непрерывная функция на борелевском множестве $A \subset \mathbb{R}^k$. Предположим, что при каждом $n \geq 1$

$$P\{(\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(k)}) \in A\} = 1, P\{(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}) \in A\} = 1.$$

Тогда последовательность случайных величин

$$\{g(\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(k)}), n \geq 1\}$$

сходится по вероятности к случайной величине

$$g(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}).$$

III.3.21. Пусть $\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty$ и $\eta_n \rightarrow \eta, n \rightarrow \infty$, по вероятности. Доказать, что

$$\xi_n + \eta_n \rightarrow \xi + \eta,$$

$$\xi_n, \eta_n \rightarrow \xi \eta,$$

$$\max(\xi_n, \eta_n) \rightarrow \max(\xi, \eta)$$

при $n \rightarrow \infty$ по вероятности.

III.3.22. Рассмотрим k последовательностей случайных величин $\{\xi_n^{(j)}, n \geq 1\}$, $1 \leq j \leq k$, причем $\xi_n^{(j)} \rightarrow \xi^{(j)}, n \rightarrow \infty$ по вероятности при каждом $1 \leq j \leq k$. Пусть $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset \mathbb{R}$ таковы, что $\mathbf{P}\{\xi^{(j)} = x_j\} = 0$ для всех $1 \leq j \leq k$. С помощью результата задачи III.3.20 доказать соотношение

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\xi_n^{(1)} < x_1, \xi_n^{(2)} < x_2, \dots, \xi_n^{(k)} < x_k\} = \\ = \mathbf{P}\{\xi^{(1)} < x_1, \xi^{(2)} < x_2, \dots, \xi^{(k)} < x_k\}. \end{aligned}$$

III.3.23. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ ; пусть $F_n(x) = \mathbf{P}\{\xi_n < x\}$, $n \geq 1$ и $F(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}$, $x \in \mathbb{R}$. Доказать, что последовательность $\{F_n, n \geq 1\}$ сходится слабо к функции F .

III.3.24. Доказать, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к числу c тогда и только тогда, когда последовательность соответствующих функций распределения $F_n(x) = \mathbf{P}\{\xi_n < x\}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \geq 1$, слабо сходится к функции

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c, \\ 1, & x > c. \end{cases}$$

III.3.25. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, $\{F_n, n \geq 1\}$ — последовательность соответствующих функций распределения вероятностей, а F — функция распределения вероятностей, принимающая более двух различных значений. Доказать, что из слабой сходимости $F_n \rightarrow F, n \rightarrow \infty$ не следует сходимость по вероятности последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$.

III.3.26. Последовательности $\{\xi_n^{(j)}, n \geq 1\}$, $1 \leq j \leq k$, сходятся по вероятности к величинам $\xi^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$ соответственно, причем при каждом n величины $\{\xi_n^{(j)}, 1 \leq j \leq k\}$ независимы. Доказать, что величины $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(k)}$ независимы.

III.3.27. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ограничена по вероятности, если

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} \mathbf{P}\{|\xi_n| > a\} = 0.$$

Пусть последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ограничена по вероятности, а $\eta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по вероятности. Доказать, что $\xi_n \eta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по вероятности.

III.3.28. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ обладает следующим свойством: для произвольной последовательности действительных чисел $\{a_n, n \geq 1\}$ такой, что $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, имеем $a_n \xi_n \rightarrow \infty$ по вероятности. Доказать, что последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ограничена по вероятности.

III.3.29. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ называется фундаментальной по вероятности, если для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ существует такое число N , что

$$\mathbf{P}\{|\xi_m - \xi_n| > \varepsilon\} < \delta, m > N, n > N.$$

Доказать, что сходящаяся по вероятности последовательность фундаментальна по вероятности.

III.3.30*. С помощью результата задачи III.3.10 доказать, что фундаментальная по вероятности последовательность сходится по вероятности к некоторой случайной величине.

III.3.31. Предположим, что $\xi_n \rightarrow \xi, \eta_n \rightarrow \eta, n \rightarrow \infty$ по вероятности, причем $\mathbf{P}\{\xi_n \leq \eta_n\} = 1, n \geq 1$. Доказать, что $\mathbf{P}\{\xi \leq \eta\} = 1$.

III.3.32. Предположим, что $\xi_n \rightarrow \xi, \zeta_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty$ по вероятности и $\mathbf{P}\{\xi_n \leq \eta_n \leq \zeta_n\} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$. Доказать, что $\eta_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty$, по вероятности.

III.3.33. Предположим, что $\xi_n \rightarrow \xi, \zeta_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty$ по распределению и при любом $n \geq 1$ $\mathbf{P}\{\xi_n \leq \eta_n \leq \zeta_n\} = 1$. Доказать, что $\eta_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty$, по распределению.

III.3.34. Построить последовательность функций распределения вероятностей на оси, которая слабо сходится к функции, не являющейся функцией распределения вероятностей.

III.3.35. Последовательность $\{F_n, n \geq 0\}$ функций распределения вероятностей на оси сходится слабо к функции F . Доказать, что F — функция распределения вероятностей тогда и только тогда, когда

$$\sup_{n \geq 1} [1 - F_n(a) + F_n(-a)] \rightarrow 0, a \rightarrow +\infty.$$

III.3.36. Пусть $\{F_n, n \geq 1\}$ — последовательность функций распределения вероятностей случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ соответственно, причем для некоторого $\alpha > 0$ и числа c

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|^\alpha dF_n(x) = M|\xi_n|^\alpha \leq c, n \geq 1.$$

Доказать, что

$$\sup_{n \geq 1} [1 - F_n(a) + F_n(-a)] \rightarrow 0, \quad a \rightarrow +\infty,$$

и что существует подпоследовательность $\{F_{n(k)}, k \geq 1\}$, которая слабо сходится к функции распределения вероятностей.

III.3.37. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится в среднем порядка $r > 0$ к величине ξ . Доказать, что $\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty$, по вероятности.

III.3.38. Предел в среднем порядка $r > 0$ единствен с вероятностью 1. Фундаментальная в среднем порядка r последовательность сходится в среднем порядка r к случайной величине. Доказать эти утверждения.

III.3.39. Доказать, что из сходимости в среднем порядка r не следует сходимость с вероятностью 1.

III.3.40. Из сходимости с вероятностью 1 не следует сходимость в среднем порядка r .

III.3.41. Пусть g — действительная непрерывная и ограниченная на оси функция, а $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходящаяся по вероятности к случайной величине ξ последовательность. Доказать, что

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} M g(\xi_n) = M g(\xi);$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} M |g(\xi_n) - g(\xi)|^r = 0, \quad r > 0.$$

III.3.42. Доказать, что из сходимости в среднем порядка $r > 0$ следует сходимость в среднем порядка s для $0 < s < r$.

III.3.43. Пусть последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится в среднем порядка $r > 0$ к случайной величине ξ . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M |\xi_n|^s = M |\xi|^s, \quad 0 < s \leq r.$$

III.3.44. Если для последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ справедливы соотношения:

$$a) P\{\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty\} = 1.$$

$$б) M \xi_n \rightarrow M \xi, \quad n \rightarrow \infty,$$

то последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ может не сходиться в среднем порядка 1. Построить пример.

III.3.45. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ , причем для некоторого числа c $P\{|\xi_n| > c\} = 0, n \geq 1$. Доказать, что $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится в среднем произвольного порядка $r > 0$ к ξ .

III.3.46. Случайные величины $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ удовлетворяют условиям:

а) для некоторого числа c при любом $n \geq 1$ $P\{|\xi_n| > c\} = 0$;

б) для любого целого $k \geq 0$

$$M \xi_n^k \rightarrow M \xi^k, n \rightarrow \infty.$$

Доказать, что последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по распределению к величине ξ .

III.3.47. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к величине ξ , причем $P\{|\xi_n| \leq \eta\} = 1, n \geq 1$ для некоторой величины η с $M \eta^r < \infty$. Доказать, что $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится к ξ в среднем порядка r .

III.3.48. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к случайной величине ξ и для некоторых постоянных c и $r > 0$ справедливы неравенства $M |\xi_n|^r \leq c, n \geq 1$. Доказать, что для любого $s, 0 < s < r$ последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится к ξ в среднем порядка s .

III.3.49. При условиях предыдущей задачи доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M |\xi_n|^s = M |\xi|^s.$$

III.3.50. Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ — вероятностное пространство, Назовем действительные случайные величины ξ и η эквивалентными, если $P\{\xi \neq \eta\} = 0$. Обозначим через X множество всех классов эквивалентности случайных величин и для $\xi, \eta \in X$ определим функцию d (класс эквивалентности и его представитель далее обозначаются одной буквой):

$$d(\xi, \eta) = M \left[\frac{|\xi - \eta|}{1 + |\xi - \eta|} \right].$$

Доказать, что: а) d есть расстояние на X ; б) сходимость относительно расстояния d эквивалентна сходимости по вероятности; в) (X, d) — полное метрическое пространство.

III.3.51. Пусть X — множество предыдущей задачи, а

$$d(\xi, \eta) = M [\min(|\xi - \eta|, 1)].$$

Доказать, что (X, d) — полное метрическое пространство и что сходимость в этом пространстве эквивалентна сходимости по вероятности.

III.3.52. Рассмотрим множество всех случайных величин ξ с $M|\xi|^r < \infty$, где $r > 0$ — фиксированное число. Пусть L_r — множество всех классов эквивалентности этих величин. Положим для $\xi, \eta \in L_r$:

$$d(\xi, \eta) = \begin{cases} M|\xi - \eta|^r, & 0 < r < 1, \\ [M|\xi - \eta|^r]^{1/r}, & r \geq 1. \end{cases}$$

Доказать утверждения:

- а) L_r — линейное пространство;
- б) d — метрика в L_r ;
- в) сходимость относительно расстояния d совпадает со сходимостью в среднем порядка r ;
- г) (L_r, d) — полное метрическое пространство, более того, L_r с $\|\xi\| = d(\xi, 0)$ есть пространство Банаха для $r \geq 1$;
- д) $L_r \subset L_s, 1 \leq s \leq r$.

III.3.53*. Последовательность функций распределения вероятностей $\{F_n, n \geq 1\}$ слабо сходится к непрерывной на оси функции распределения вероятностей F . Доказать, что $F_n \rightarrow F, n \rightarrow \infty$, равномерно на оси.

III.3.54. Величины последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ удовлетворяют условиям: $P\{|\xi_n| \geq a\} = 0$ для $n \geq 1$ и некоторого числа a и $\xi_n \rightarrow c, n \rightarrow \infty$ по вероятности к постоянной c , а последовательность $\{\eta_n, n \geq 1\}$ такова, что $M\eta_n = d, n \geq 1, d \in \mathbb{R}$ и

$$\sup_{n \geq 1} \int_{\{|\eta_n| > A\}} |\eta_n| dP \rightarrow 0, A \rightarrow \infty.$$

Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M\xi_n\eta_n = cM\eta_1.$$

III.3.55. При условиях предыдущей задачи построить пример, показывающий, что утверждение предыдущей задачи не имеет места, если на последовательность $\{\eta_n, n \geq 1\}$ не накладывать условий дополнительно к требованию $M\eta_n = d, n \geq 1$.

III.3.56. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ случайных величин называется равномерно интегрируемой, если

$$\sup_{n \geq 1} \int_{\{|\xi_n| > a\}} |\xi_n| dP \rightarrow 0, a \rightarrow +\infty.$$

Доказать равномерную интегрируемость последовательности, сходящейся в среднем порядка $r > 0$.

III.3.57. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и величина η таковы, что $P\{|\xi_n| \leq \eta\} = 1, n \geq 1$ и $M\eta < \infty$. Доказать, что последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ является равномерно интегрируемой. Привести пример, показывающий, что не для любой равномерно интегрируемой последовательности существует величина η , удовлетворяющая условию задачи.

III.3.58*. Пусть последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — равномерно интегрируема. Доказать, что:

$$a) \sup_{n \geq 1} \int_{A_m} |\xi_n| dP \rightarrow 0, m \rightarrow \infty$$

для любой последовательности $A_m, m \geq 1; A_m \supset A_{m+1}$,

$$m \geq 1 \text{ и } \bigcap_{m=1}^{\infty} A_m = \emptyset;$$

б) для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$\sup_{n \geq 1} \int_A |\xi_n| dP < \varepsilon$$

для всех A с $P(A) < \delta$;

$$в) \sup_{n \geq 1} M|\xi_n| < \infty.$$

III.3.59. Пусть последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ является равномерно интегрируемой и сходится по вероятности к случайной величине ξ . Доказать, что эта последовательность сходится в среднем порядка 1.

Указание. Использовать п. в) предыдущей задачи и доказать, что $M|\xi| < \infty$.

III.3.60. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, причем $M|\xi_n| < \infty$ при каждом $n \geq 1$. Если существует неотрицательная и возрастающая при $t \geq 0$ функция a такая, что

$\frac{a(t)}{t} \rightarrow +\infty, t \rightarrow +\infty; \sup_{n \geq 1} M a(|\xi_n|) < \infty$, то последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ является равномерно интегрируемой. Доказать это утверждение.

III.3.61. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ с некоторым $r > 0$ удовлетворяет условию

$$\sup_{n \geq 1} M |\xi_n|^r < \infty.$$

Доказать, что при каждом $s, 0 \leq s < r$ последовательность $\{|\xi_n|^s, n \geq 1\}$ равномерно интегрируема. Построить пример, показывающий, что утверждение задачи неверно при $s = r$.

III.3.62. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ такова, что

$M\xi_n = 0, M\xi_n^2 = \sigma^2, n \geq 1; M(\xi_m \xi_n) = 0, m \neq n$. Положим $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, n \geq 1$. Доказать, что последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{n}} S_n, n \geq 1,$$

равномерно интегрируема.

III.3.63. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится к числу c в среднем квадратичном, а случайные величины $\eta_n, n \geq 1$ удовлетворяют условиям:

$$M\eta_n = d \in \mathbb{R}, n \geq 1; \sup_{n \geq 1} M\eta_n^2 < \infty.$$

Доказать равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi_n \eta_n) = c M\eta_1$.

III.3.64. Последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и $\{\eta_n, n \geq 1\}$ сходятся в среднем квадратичном к случайным величинам ξ и η соответственно. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi_n \eta_n) = M(\xi \eta),$$

в частности, если случайная величина ζ такова, что $M\zeta^2 < \infty$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi_n \zeta) = M(\xi \zeta).$$

III.3.65. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин таких, что для некоторого числа $c \in \mathbb{R}$

$$P\{|\xi_n| > c\} = 0, n \geq 1.$$

При этом предположении необходимым и достаточным условием сходимости $\xi_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности является соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M|\xi_n| = 0.$$

III.3.66. Если для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ имеет место сходимость $\exp(\xi_n) \rightarrow 1$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности, то $\xi_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности.

III.3.67. Каждая из случайных величин ξ_n , $n \geq 1$ принимает только натуральные значения, причем

$$P\{\xi_n = k\} = c_n k^{-2-\frac{1}{n}}, \quad k \geq 1,$$

где

$$c_n = \left(\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2-\frac{1}{n}} \right)^{-1},$$

Доказать, что последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по распределению к величине ξ :

$$P\{\xi = k\} = \frac{c}{k^2}, \quad c = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right)^{-1}.$$

Доказать также, что $M\xi_n < \infty$, $n \geq 1$, а $M\xi = +\infty$.

Построить пример последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$, которая сходится по распределению к величине ξ и при этом $M|\xi_n| = +\infty$, $n \geq 1$, а $M|\xi| < \infty$.

III.3.68. Доказать, что сходящаяся по распределению последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ограничена по вероятности, т. е.

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sup_{n \geq 1} P\{|\xi_n| > a\} = 0.$$

III.3.69. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ ограничена по вероятности, последовательность $\{\eta_n, n \geq 1\}$ сходится к 0 по вероятности, а g — действительная непрерывная на оси функция.

Доказать, что

$$g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

по вероятности, в частности,

$$(\xi_n + \eta_n)^2 - \xi_n^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

по вероятности.

III.3.70. Пусть выполнены все условия предыдущей задачи, кроме условия на последовательность $\{\eta_n, n \geq 1\}$. Предположим, что $\eta_n \rightarrow c, n \rightarrow \infty$, к некоторому числу $c \in \mathbb{R}$ по вероятности.

Доказать, что последовательности

$$\begin{aligned} &\{g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n + c), n \geq 1\}. \\ &\{g(\xi_n \eta_n) - g(c \xi_n), n \geq 1\} \end{aligned}$$

и при $c \neq 0$ последовательность

$$\{g(\xi_n/\eta_n) - g(\xi_n/c), n \geq 1\}$$

сходятся к 0 по вероятности.

III.3.71. Доказать, что последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по распределению к случайной величине ξ тогда и только тогда, когда для любой действительной непрерывной и ограниченной на оси функции g справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M g(\xi_n) = M g(\xi).$$

III.3.72. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по распределению к величине ξ , а последовательность $\{\eta_n, n \geq 1\}$ сходится к постоянной c по вероятности. Доказать, что последовательности

$$\{\xi_n + \eta_n, n \geq 1\}; \{\xi_n \eta_n, n \geq 1\};$$

а при $c \neq 0$ и последовательность

$$\{\xi_n/\eta_n, n \geq 1\}$$

сходятся по распределению к величинам $\xi + c, c\xi$ и ξ/c соответственно.

III.3.73. Пусть $\zeta, \xi_n, \eta_n, n \geq 1$ — случайные величины, причем $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по распределению к величине ζ и с вероятностью 1

$$|\xi_n - \eta_n| \leq \varepsilon_n |\xi_n|, n \geq 1,$$

для некоторой сходящейся по вероятности к 0 последовательности случайных величин $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$. Доказать, что $\{\eta_n, n \geq 1\}$ сходится по распределению к ζ .

III.3.74. Пусть выполнены все условия предыдущей задачи, кроме неравенств. Предположим, что

$$P\{|\xi_n - \eta_n| \leq \varepsilon_n | \eta_n|\} = 1, n \geq 1.$$

Доказать, что последовательность $\{\eta_n, n \geq 1\}$ сходится по распределению к ξ .

III.3.75. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по распределению к величине ξ . Доказать, что для любой непрерывной на оси функции h последовательность $\{h(\xi_n), n \geq 1\}$ сходится по распределению к величине $h(\xi)$.

III.3.76. Пусть $\{v(n), n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин таких, что

$$P\{v(n) \leq v(n+1)\} = 1, n \geq 1;$$

$$v(n) \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty,$$

по вероятности, т. е. для любого $c > 0$

$$P\{v(n) > c\} \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

Доказать, что

$$P\{v(n) \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty\} = 1.$$

III.3.77. Последовательность $\{v(n), n \geq 1\}$ сходится к $+\infty$ при $n \rightarrow \infty$ по вероятности. Пусть $\kappa(n) = 1/v(n)$, если $v(n) \neq 0$, и $\kappa(n) = 0$, если $v(n) = 0, n \geq 1$. Доказать, что $\kappa(n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по вероятности.

III.3.78. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится с вероятностью 1 к величине ξ при $n \rightarrow \infty$, а каждая из случайных величин $v(n), n \geq 1$, принимает только натуральные значения, причем

$$P\{v(n) \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty\} = 1.$$

Доказать, что

$$P\{\xi_{v(n)} \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty\} = 1.$$

III.3.79. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин таких, что

$$P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, P\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{n}, n \geq 1.$$

Определим последовательность случайных величин $\{v(n), n \geq 1\}$ следующим образом:

$$v(1) = \min\{n: n \geq 1, \xi_n = 1\};$$

если величина $v(n)$ определена, то

$$v(n+1) = \min\{m: m > v(n), \xi_m = 1\}.$$

Доказать, что: а) $\xi_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности, б) величины $v(n)$, $n \geq 1$, определены с вероятностью 1, причем

$$n \leq v(n) < v(n+1), \quad n \geq 1, \quad P\{v(n) \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty\} = 1;$$

в) $\xi_{v(n)} \equiv 1$, $n \geq 1$.

III.3.80. Пусть последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности к величине ξ , а $\{v(n), n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, каждая из которых принимает только натуральные значения, причем $v(n) \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности. Предположим, что совокупности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и $\{v(n), n \geq 1\}$ независимы. Доказать, что $\xi_{v(n)} \rightarrow \xi$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности.

III.3.81. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится по распределению к величине ξ , а $\{v(n), n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, каждая из которых принимает только натуральные значения, причем $v(n) \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности. Предположим, что совокупности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и $\{v(n), n \geq 1\}$ независимы. Доказать, что последовательность $\{\xi_{v(n)}, n \geq 1\}$ сходится по распределению к ξ .

III.3.82. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ сходится в среднем порядка $r > 0$ к ξ , а $\{v(n), n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, каждая из которых принимает только натуральные значения, причем $v(n) \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности. Предположим, что совокупности $\{\xi; \xi_n, n \geq 1\}$ и $\{v(n), n \geq 1\}$ независимы. Доказать, что последовательность $\{\xi_{v(n)}, n \geq 1\}$ сходится к ξ в среднем порядка r .

III.3.83. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин; при каждом $n \geq 1$ f_n — действительная борелевская симметрическая функция от n переменных,

$$f_n(x_1, \dots, x_n) = f_n(x_{i_1}, \dots, x_{i_n}),$$

где i_1, \dots, i_n — произвольная перестановка чисел $1, 2, \dots, n$. Если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = \zeta$$

по вероятности, то $P\{\zeta = c\} = 1$, где $c \in \mathbb{R}$.

Указание. а) Достаточно рассмотреть случай, когда $|f_n| < 1$, $n \geq 1$; в общем случае можно перейти к функциям $\operatorname{arctg} f_n$, $n \geq 1$. Справедливо равенство

$$M[f_{2n}(\xi_1, \dots, \xi_{2n}) - f_n(\xi_1, \dots, \xi_n)]^2 = M[f_{2n}(\xi_1, \dots, \xi_{2n}) - f_n(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n})]^2,$$

откуда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M[f_{2n}(\xi_1, \dots, \xi_{2n}) - f_n(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n})]^2 = 0.$$

б) Далее рассмотреть

$$M[f_n(\xi_1, \dots, \xi_n) - f_n(\xi_{n+1}, \dots, \xi_{2n})]^2$$

и доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Df_n(\xi_1, \dots, \xi_n) = 0.$$

III.3.84. Пусть $\{F_n, n \geq 1\}$ — последовательность функций распределения вероятностей, слабо сходящаяся к функции распределения вероятностей F . Доказать, что существуют вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ и случайные величины $\xi; \xi_n, n \geq 1$, на нем с функциями распределения $F; F_n, n \geq 1$, соответственно и такие, что $P\{\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty\} = 1$.

III.3.85. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, сходящаяся по распределению к величине ξ . Доказать, что

$$M|\xi| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} M|\xi_n|.$$

III.3.86. Последовательность функций распределения вероятностей $\{F_n, n \geq 1\}$ слабо сходится к функции распределения F , причем моменты порядка $r > 0$ функций $F_n, n \geq 1$ равномерно ограничены:

$$\sup_{n \geq 1} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^r dF_n(x) < \infty.$$

Доказать, что для любого $s, 0 \leq s < r$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^s dF(x),$$

в частности для натурального m , $m < r$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^m dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^m dF(x).$$

Указание. Использовать результаты задач III.3.84 и III.3.49.

III.3.87. Пусть D — множество всех функций распределения на оси. Для $F, G \in D$ положим

$$d(F, G) = \inf \{ \varepsilon : \varepsilon > 0; F(x - \varepsilon) - \varepsilon \leq G(x) \leq F(x + \varepsilon) + \varepsilon, x \in \mathbb{R} \}.$$

а) Определить $d(F, G_n)$ для F — функции равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$, и G_n — функции распределения вероятностей случайной величины ξ такой, что

$$P \left\{ \xi = \frac{k}{n} \right\} = \frac{1}{n+1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n; n \geq 1.$$

Доказать, что:

б) d — расстояние на D ;

в) сходимость относительно расстояния d эквивалентна слабой сходимости к функции распределения;

г) (D, d) — полное метрическое пространство.

III.3.88. Доказать, что последовательность m -мерных случайных величин $\{\vec{\xi}^{(n)} = (\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_m^{(n)}), n \geq 1\}$ сходится по вероятности к m -мерной случайной величине $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ тогда и только тогда, когда для каждого k , $1 \leq k \leq m$,

$$\xi_k^n \rightarrow \xi_k, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.3.89. Последовательность $\{\vec{\xi}^{(n)}, n \geq 1\}$ случайных величин из \mathbb{R}^m сходится по вероятности к случайной величине $\vec{\xi}$ из \mathbb{R}^m , а g — действительная ограниченная непрерывная функция на \mathbb{R}^m . Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M g(\vec{\xi}^{(n)}) = M g(\vec{\xi}).$$

III.3.90. Если последовательность векторных случайных величин сходится по вероятности, то последовательность соответствующих функций распределения вероят-

ностей слабо сходится к функции распределения вероятностей.

III.3.91. Последовательность $\{\vec{\xi}^{(n)}, n \geq 1\}$ случайных величин из \mathbf{R}^m сходится по вероятности тогда и только тогда, когда существует случайная величина $\vec{\xi}$ из \mathbf{R}^m такая, что каждая подпоследовательность $\{\vec{\xi}^{(n(k))}, k \geq 1\}$ содержит в себе подпоследовательность, сходящуюся к $\vec{\xi}$ по норме \mathbf{R}^m с вероятностью 1. Доказать это утверждение.

III.3.92. Если последовательность $\{F_n, n \geq 1\}$ функций распределения вероятностей в \mathbf{R}^m слабо сходится к непрерывной функции распределения вероятностей F на \mathbf{R}^m , то $F_n \rightarrow F, n \rightarrow \infty$, равномерно на \mathbf{R}^m . Доказать это утверждение.

III.3.93. Последовательность $\{\vec{\xi}^{(n)}, n \geq 1\}$ m -мерных случайных величин сходится по распределению к m -мерной величине $\vec{\xi}$, а h — действительная непрерывная функция на \mathbf{R}^m . Доказать, что последовательность $\{h(\vec{\xi}^{(n)}), n \geq 1\}$ сходится по распределению к величине $h(\vec{\xi})$.

III.3.94. Последовательность $\{\vec{\xi}^{(n)}, n \geq 1\}$ случайных величин из \mathbf{R}^m сходится по распределению к случайной величине $\vec{\xi}$; последовательность $\{\vec{\eta}^{(n)}, n \geq 1\}$ случайных величин из \mathbf{R}^k сходится по вероятности к постоянному вектору $\vec{c} \in \mathbf{R}^k$; h — действительная непрерывная функция на \mathbf{R}^{m+k} . Доказать, что последовательность

$$\{h(\vec{\xi}^{(n)}, \vec{\eta}^{(n)}) - h(\vec{\xi}^{(n)}, \vec{c}); n \geq 1\}$$

сходится к 0 по вероятности.

III.3.95. Пусть $\{A_n = (\alpha_{jk}^{(n)})_{j,k=1}^m; n \geq 1\}$ — последовательность матриц размера $m \times m$ со случайными элементами, причем при любых j, k последовательность $\{\alpha_{jk}^{(n)}, n \geq 1\}$ сходится по вероятности при $n \rightarrow \infty$ к числу c_{jk} ; $1 \leq j, k \leq m$; пусть $A = (c_{jk})_{j,k=1}^m$. Последовательность $\{\vec{\xi}^{(n)}, n \geq 1\}$ случайных величин из \mathbf{R}^m сходится к $\vec{\xi}$ по рас-

пределению. Доказать, что последовательность векторов

$$\{A_n \vec{\xi}^{(n)}, n \geq 1\}$$

сходится по распределению к $A \vec{\xi}$.

§ 4. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ случайных величин с $M|\xi_n| < \infty$, $n \geq 1$, удовлетворяет закону больших чисел, если

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \text{ по вероятности,}$$

т. е. если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \right| > \varepsilon \right\} = 0.$$

Теорема 1. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин, для которых при всех $n \geq 1$ $M\xi_n^2 < \infty$ и

$$\frac{1}{n} D\xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

удовлетворяет закону больших чисел.

Теорема 2. (Закон больших чисел в форме Хинчина). Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, для которых $M|\xi_1| < \infty$, удовлетворяет закону больших чисел, а именно

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow \mu, n \rightarrow \infty,$$

по вероятности с $\mu = M\xi_1$.

III.4.1. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} D \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right) = 0.$$

Доказать, что для этой последовательности справедлив закон больших чисел.

III.4.2. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ случайных величин удовлетворяет условиям:

$$M\xi_n = 0, \quad P\left\{\left|\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right| > c\right\} = 0, \quad n \geq 1;$$

c — число и, кроме того, последовательность

$$\frac{1}{n^2} M\left(\sum_{k=1}^n \xi_k\right)^2, \quad n \geq 1,$$

не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ закон больших чисел не выполняется.

III.4.3. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин, а f — действительная периодическая с периодом 1 непрерывная на оси функция. Доказать, что для любого $x \in \mathbb{R}$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x + \xi_k) \rightarrow \int_0^1 f(u) du, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.4.4. Для действительной непрерывной на $[0, 1]$ функции f вычислить предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

III.4.5. Вычислить предел ($m \in \mathbb{N}$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \cos^{2m} \frac{\pi}{2n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

III.4.6. Для действительной непрерывной на $[0, 1]$ функции f доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 f(\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}) dx_1 \dots dx_n = f\left(\frac{1}{e}\right).$$

III.4.7. Действительные и непрерывные на отрезке $[0, 1]$ функции f, g таковы, что с некоторым числом $c > 0$ для

всех $x \in (0, 1)$ справедливо неравенство $0 \leq f(x) < cg(x)$.
Доказать соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{g(x_1) + \dots + g(x_n)} dx_1 \dots dx_n = \frac{\int_0^1 f(x) dx}{\int_0^1 g(x) dx}.$$

III.4.8. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{x_1 + \dots + x_n} dx_1 \dots dx_n = \frac{2}{3}.$$

III.4.9. Действительная функция f имеет непрерывную f'' на отрезке $[0, 1]$. Доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right] dx_1 \dots dx_n = \frac{f''\left(\frac{1}{2}\right)}{24}.$$

III.4.10. Вычислить пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n; \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq \sqrt{n} \end{array} \right\}$$

$$б) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n; \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq \frac{n}{4} \end{array} \right\}$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \dots \int_0^1 dx_1 dx_2 \dots dx_n. \\ \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x_i \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n \\ x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq \frac{n}{2} \end{array} \right\}$$

III.4.11. Пусть f — действительная неотрицательная функция на оси такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \quad \sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx < \infty.$$

Вычислить пределы:

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int_{\{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 < \sqrt{n}\}} f(x_1) f(x_2) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n;$$

$$b) \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int_n f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad a < \sigma^2; \\ \left\{ \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq an \right\}$$

$$в) \lim_{n \rightarrow \infty} \int \cdots \int_n f(x_1) \cdots f(x_n) dx_1 \cdots dx_n, \quad a > \sigma^2. \\ \left\{ \sum_{k=1}^n x_k^2 \leq an \right\}$$

III.4.12. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \rightarrow x, \quad \frac{1}{n} D\xi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказать, что для любой действительной ограниченной и непрерывной на оси функции f справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Mf\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k\right) = f(x).$$

III.4.13. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Доказать, что

$$\left\{ e^n \prod_{k=1}^n \xi_k \right\}^{1/n} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.4.14. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых величин, каждая из которых имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 1$. Доказать, что

$$\left\{ \prod_{k=1}^n \xi_k \right\}^{1/n} \rightarrow e^{-c}, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности; здесь c — постоянная Эйлера,

$$-c = \Gamma'(1) = \int_0^{\infty} \ln x e^{-x} dx.$$

III.4.15. Величины ξ_1, ξ_2, \dots определяются равенством

$$\xi_n = \alpha_0 \varepsilon_n + \alpha_1 \varepsilon_{n-1} + \dots + \alpha_r \varepsilon_{n-r}, \quad n \geq 1;$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r$ — действительные числа, а $\{\varepsilon_n, n \geq -r+1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M|\varepsilon_1| < \infty$. Доказать, что последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет закону больших чисел.

III.4.16. Величины ξ_1, ξ_2, \dots удовлетворяют соотношениям

$$\xi_n + \alpha \xi_{n-1} = \varepsilon_n, \quad n \geq 1;$$

где $\alpha, |\alpha| < 1$, — фиксированное число, ξ_0 — некоторая случайная величина, а $\{\varepsilon_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M|\varepsilon_1| < \infty$. Доказать, что последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет закону больших чисел.

III.4.17. К условиям предыдущей задачи добавим ограничения: $M\varepsilon_1 = 0, M\varepsilon_1^4 < \infty$. Доказать, что

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{k-1}^2 \right)^{-1} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \xi_{k-1} \rightarrow -\alpha, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.4.18. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, а g — действительная борелевская функция на \mathbb{R}^m такая, что

$$M|g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m)|^2 < \infty.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+m-1}) \rightarrow Mg(\xi_1, \dots, \xi_m), \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.4.19. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_1 = \mu, D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$. Доказать, что

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow \mu, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - \bar{x})^2 \rightarrow \sigma^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.4.20. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Для целого $n \geq 1$ и $x \in \mathbb{R}$ определим величину $F_n(x)$ следующим образом:

$$F_n(x) = \frac{\text{число тех членов из } \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \text{ которые меньше } x}{n}.$$

При каждом $n \geq 1$ функция F_n есть функция распределения вероятности на оси. Вычислить $MF_n(x)$, $DF_n(x)$ для $x \in \mathbb{R}$ и доказать, что при любом $x \in \mathbb{R}$

$$F_n(x) \rightarrow F(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x\}, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.4.21. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин таких, что для некоторого r , $0 < r \leq 2$, $M|\xi_n|^r < \infty$, $n \geq 1$, и

$$n^{-r/2} \sum_{k=1}^n \sqrt{M|\xi_k|^r} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказать, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.4.22. Случайные величины $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимы и таковы, что

$$\mathbf{P}\{\xi_n = n^s\} = \mathbf{P}\{\xi_n = -n^s\} = \frac{1}{2}$$

при каждом $n \geq 1$. Доказать, что при $s < \frac{1}{2}$ последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет закону больших чисел.

III.4.23. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин с $M\xi_1 = \mu$, $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$ и $\mathbf{P}\{\xi_1 = 0\} = 0$. Доказать, что

$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2} \rightarrow \frac{\mu}{\mu^2 + \sigma^2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.4.24. Последовательность случайных величин $\{\eta_n(x), n \geq 1\}$, $x \in A \subset \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям: $M\eta_n(x) = x$, $D\eta_n(x) = \sigma_n^2(x)$, $n \geq 1$; $x \in A$, причем

$$\sup_{x \in A} \sigma_n^2(x) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Доказать, что для непрерывной и ограниченной на оси функции f , которая является равномерно непрерывной на A ,

$$Mf(\eta_n(x)) \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty,$$

равномерно на A .

III.4.25. Пусть f — действительная непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция. Доказать, что многочлены Бернштейна

$$B_n(f; x) = \sum_{k=0}^n C_n^k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}, n \geq 1,$$

сходятся к f равномерно на $[0, 1]$.

Указание. Результат этой задачи включает в себя теорему Вейерштрасса о возможности равномерного приближения многочленами непрерывной функции с любой точностью. Для решения представить $B_n(f; x)$ в виде математического ожидания и проверить выполнение условий предыдущей задачи.

III.4.26. Пусть f — непрерывная на $[0, \infty)$ действительная функция. Доказать, что равномерно на каждом конечном интервале

$$e^{-nx} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right) \frac{(nx)^k}{k!} \rightarrow f(x), n \rightarrow \infty,$$

(см. указание к предыдущей задаче).

III.4.27. Доказать, что

$$e^{-\lambda x} \sum_{\{k: k < \lambda \theta\}} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \begin{cases} 0, & \theta \leq x \\ 1, & \theta > x. \end{cases}$$

III.4.28. Пусть F — функция распределения вероятностей на $[0, \infty)$, а φ — ее преобразование Лапласа,

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dF(x), \lambda \geq 0.$$

С помощью результата предыдущей задачи доказать следующую формулу обращения для преобразования Лапласа:

$$\sum_{\{k; k < \lambda x\}} \frac{(-1)^k}{k!} \lambda^k \varphi^{(k)}(\lambda) \rightarrow F(x), \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

для тех x , которые есть точки непрерывности функции F .

III.4.29. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_1 = 0$. Доказать, что:

а) последовательность

$$\left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k, n \geq 1 \right\}$$

равномерно интегрируема;

$$\text{б) } \frac{1}{n} M |\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

III.4.30. Пусть $v; \xi_n, n \geq 1$, — независимые случайные величины, причем $M\xi_n = 0, n \geq 1$, и

$$\frac{1}{n} M \xi_n^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

а v — случайная величина, имеющая распределение Пуассона с параметром λ . Доказать, что

$$\frac{1}{v+1} \sum_{k=1}^{v+1} \xi_k \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow \infty$$

по вероятности.

III.4.31. Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ такова, что

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности, а $\{v(n), n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, каждая из которых принимает только натуральные значения, и $v(n) \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$, по вероят-

ности. Предположим, что совокупности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и $\{v(n), n \geq 1\}$ независимы. Доказать, что

$$\frac{1}{v(n)} \sum_{k=1}^{v(n)} \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

§ 5. НЕРАВЕНСТВО КОЛМОГОРОВА И НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА, СВЯЗАННЫЕ С НИМ

Следующие неравенства играют основную роль при изучении сходимости рядов из независимых случайных величин.

Далее для последовательности $\{\xi_k, k \geq 1\}$ будем использовать обозначения $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, n \geq 1$.

Теорема 1. (Неравенство Колмогорова). Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — независимые случайные величины, причем

$$M\xi_k = 0, D\xi_k < \infty, 1 \leq k \leq n.$$

Для любого $a > 0$ справедливо неравенство

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq a \right\} \leq \frac{DS_n}{a^2}.$$

Теорема 2. Пусть $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ — независимые случайные величины такие, что $M\xi_k = 0$ и для некоторого числа c $P\{|\xi_k| > c\} = 0, 1 \leq k \leq n$. Для любого $a > 0$ справедливо неравенство

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq a \right\} \geq 1 - \frac{(a + c)^2}{DS_n}.$$

Случайная величина ξ называется симметричной, если распределения вероятностей величин ξ и $-\xi$ совпадают.

Теорема 3. Пусть $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ — независимые симметричные величины. Для любого $a > 0$ справедливо неравенство

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq a \right\} \leq 2P \{ |S_n| \geq a \}.$$

III.5.1. Доказать, что для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин с $M\xi_n = 0, n \geq 1$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n < \infty$$

при любом $a > 0$ справедливо неравенство

$$P \left\{ \sup_{n \geq 1} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \right| \geq a \right\} \leq \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n.$$

III.5.2. Случайные величины $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ независимы, причем $M\xi_k = a_k$, $D\xi_k < \infty$, $1 \leq k \leq n$. Доказать, что для любого числа a , удовлетворяющего условию

$$a > \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k a_i \right|,$$

выполняется неравенство

$$P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k \xi_i \right| \geq a \right\} \leq \frac{\sum_{i=1}^n D\xi_i}{\left(a - \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^k a_i \right| \right)^2}.$$

III.5.3. Случайные величины $\{\xi_k, 1 \leq k \leq n\}$ независимы, причем для некоторых чисел c , a , α справедливы соотношения:

$$P \{ |\xi_k| > c \} = 0, \quad 1 \leq k \leq n;$$

$$P \left\{ \max_{m \leq l \leq n} \left| \sum_{k=m}^l \xi_k \right| \geq a \right\} \leq \alpha.$$

Доказать, что при каждом m , $1 \leq m \leq n$, выполняются следующие неравенства:

$$\text{а) } P \left\{ \max_{m \leq l \leq n} \left| \sum_{k=m}^l \xi_k \right| \geq 2a + c \right\} \leq \alpha^2;$$

$$\text{б) } P \left\{ \max_{m \leq l \leq n} \left| \sum_{k=m}^l \xi_k \right| \geq sa + (s-1)c \right\} \leq \alpha^s, \quad s \in \mathbb{N};$$

$$\text{в) } M \left(\max_{m \leq l \leq n} \left| \sum_{k=m}^l \xi_k \right| \right)^r \leq r \sum_{s=1}^{\infty} \alpha^{s-1} [s(a+c)]^r, \quad r > 0.$$

Указание. Для доказательства а) использовать включение

$$\begin{aligned} & \left\{ \max_{m \leq l \leq n} \left| \sum_{k=m}^l \xi_k \right| \geq 2a + c \right\} \subset \\ & \subset \bigcup_{u=m}^{n-1} \left\{ \left| \sum_{k=m}^v \xi_k \right| < a, \quad v \leq u-1; \left| \sum_{k=m}^u \xi_k \right| \geq a \right\} \cap \\ & \cap \left\{ \max_{u+1 \leq l \leq n} \left| \sum_{k=u+1}^l \xi_k \right| \geq a \right\} \end{aligned}$$

III.5.4. Предположим, что величины ξ_k , $1 \leq k \leq n$, — независимы, причем $M\xi_k = 0$, $1 \leq k \leq n$. Пусть g — непрерывная неотрицательная выпуклая вниз и монотонно неубывающая на $[0, \infty)$ функция. Доказать, что для любого $a > 0$ выполняется неравенство

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq a\} \leq \frac{Mg(S_n)}{g(a)}.$$

III.5.5. Случайные величины ξ_k , $1 \leq k \leq n$, независимы симметричны и $\xi_k^2 = 1$, $1 \leq k \leq n$. Доказать равенство

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq l\} = 2P\{S_n > l\} + P\{S_n = l\}.$$

III.5.6. Величины ξ_k , $1 \leq k \leq n$, удовлетворяют условиям предыдущей задачи. Суммы S_1, S_2, \dots, S_n пересекают промежуток $[-a, a]$, $a > 0$, не менее чем r раз, если существуют такие k_1, k_2, \dots, k_{r+1} , что

$$S_{k_1} \geq a, S_{k_2} \leq -a, S_{k_3} \geq a, \dots$$

или

$$S_{k_1} \leq -a, S_{k_2} \geq a, S_{k_3} \leq -a, \dots$$

Пусть q_r — вероятность того, что суммы S_1, S_2, \dots, S_n пересекают промежуток $[-a, a]$ не менее чем r раз. Доказать, что для $r \geq 1$

$$q_r + q_{r+1} = P\{\max_{1 \leq k \leq n} S_k \geq (2r + 1)a\}.$$

III.5.7. Случайные величины ξ_k , $k = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют условиям:

$$M\xi_k^2 < \infty, M\{\xi_k/\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{k-1}\} = 0, 1 \leq k \leq n; \xi_0 = 0.$$

Доказать неравенство

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq a\} \leq \frac{MS_n^2}{a^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{k=1}^n M\xi_k^2, \quad a > 0.$$

III.5.8. Случайные величины ξ_k , $1 \leq k \leq n$ независимы, причем $M\xi_k = 0$, $M\xi_k^2 < \infty$, $1 \leq k \leq n$. Для любого набора чисел $0 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ доказать неравенство

$$P\{|S_k| \leq a_k, 1 \leq k \leq n\} \geq 1 - \sum_{k=1}^n \frac{M\xi_k^2}{a_k^2}.$$

III.5.9. Случайные величины ξ_k , $1 \leq k \leq n$ удовлетворяют условиям:

а) $M|\xi_k| < \infty$, $1 \leq k \leq n$;

б) $M(\xi_k/\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \geq \xi_{k-1}$, $2 \leq k \leq n$ с вероятностью 1. Такая последовательность случайных величин называется субмартингалом. Доказать неравенство

$$P\{\max_{1 \leq k \leq n} \xi_k \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} M \max(0, \xi_n), \quad \varepsilon > 0.$$

III.5.10. Пусть ξ_k , $1 \leq k \leq n$ — независимые случайные величины с $M\xi_k = 0$, $M\xi_k^2 < \infty$, $1 \leq k \leq n$. Доказать неравенство

$$M\{\max_{1 \leq k \leq n} |S_k|\} \leq 2\sqrt{MS_n^2}.$$

§ 6. РЯДЫ ИЗ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Пусть $(\Omega, \mathfrak{U}, P)$ — вероятностное пространство, ξ и ξ_n , $n \geq 1$, — случайные величины и $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$.

Ряд из случайных величин $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится к случайной величине ξ по вероятности, с вероятностью 1, в среднем порядка r , по распределению, если при $n \rightarrow \infty$ последовательность случайных величин $\{S_n, n \geq 1\}$ сходится к величине ξ по вероятности, с вероятностью 1, в среднем порядка r , по распределению соответственно. При этом в случае сходимости в среднем порядка r предполагается, что $M|\xi_n|^r < \infty$, $n \geq 1$, $M|\xi|^r < \infty$.

Наиболее важные факты о рядах с независимыми членами содержатся в следующих теоремах:

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем $M\xi_n^2 < \infty$, $n \geq 1$.

Если сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n,$$

то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1.

Если для некоторого числа c справедливы равенства $P\{|\xi_n| > c\} = 0$, $n \geq 1$, то из сходимости с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

следует сходимость рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n.$$

Напомним, что $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, и отметим, что при условиях первой части теоремы 1 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится и в среднем квадратическом.

Теорема 2. (Теорема Колмогорова о трех рядах). Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин. Для числа $c > 0$ и случайной величины ξ положим $\xi^c = \xi$, если $|\xi| < c$, и $\xi^c = 0$, если $|\xi| \geq c$. Для сходимости с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

необходимо, чтобы для каждого $c > 0$, и достаточно, чтобы для некоторого $c > 0$ сходились ряды:

$$1. \quad \sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| > c\};$$

$$2. \quad \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^c,$$

$$3. \quad \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n^c.$$

Теорема 3. Для рядов с независимыми членами понятия сходимости по вероятности, с вероятностью 1 и по распределению эквивалентны.

При дополнительных условиях некоторые частные случаи теоремы 3 рассматриваются ниже в задачах.

III.6.1. Пусть $\xi, \xi_n, n \geq 1$ — случайные величины. Построить множества:

а) элементарных событий $\omega \in \Omega$, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega);$$

б) элементарных событий $\omega \in \Omega$, для которых ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\omega)$$

сходится. Проверить, что эти множества принадлежат \mathfrak{A} .

III.6.2. Для сходимости с вероятностью 1 ряда со случайными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \quad (*)$$

а) необходимо, чтобы

$$\eta_n = \sup_{m \geq n} |\xi_m| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности,

б) необходимо и достаточно, чтобы

$$\zeta_n = \sup_{m \geq n} \left| \sum_{k=n}^m \xi_k \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

Если величины ξ_n , $n \geq 1$ — независимы, то для сходимости с вероятностью 1 ряда (*):

в) необходимо, чтобы

$$\mathbf{P} \{ \eta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \} = 1,$$

г) необходимо и достаточно, чтобы

$$\mathbf{P} \{ \zeta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \} = 1.$$

III.6.3. Пусть $\{\xi_n, \quad n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, для которых существует последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n, \quad n \geq 1\}$ таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n < \infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ |\xi_n| \geq \varepsilon_n \} < \infty.$$

Доказать, что при этих условиях ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1.

III.6.4. Пусть $\{\xi_n, \quad n \geq 1\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин таких, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M} \xi_n < \infty.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1.

III.6.5. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} M |\xi_n| < \infty.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится абсолютно с вероятностью 1.

III.6.6. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $P\{\xi_1 = -1\} = P\{\xi_1 = 1\} = \frac{1}{2}$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n} \text{ сходится условно с вероятностью 1.}$$

III.6.7. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин. Положим $\xi^{(1)} = \min(\xi, 1)$ для величины ξ . Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда с вероятностью 1 сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^{(1)}.$$

III.6.8. Случайные величины последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ удовлетворяют условию ортогональности $M(\xi_m \xi_n) = 0$,

$m \neq n$. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \xi_n^2 < \infty.$$

III.6.9. Величины ξ и η называются некоррелированными, если $M \xi^2 < \infty$, $M \eta^2 < \infty$ и $M(\xi \eta) = M \xi M \eta$. Для

сходимости в среднем квадратическом ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ из по-

парно некоррелированных случайных величин ξ_n , $n \geq 1$ необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n.$$

III.6.10. Построить пример ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$, который сходится в среднем квадратическом и для которого:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} |M\xi_n| &= +\infty, & \sum_{n=1}^{\infty} M|\xi_n| &= +\infty, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (M\xi_n)^2 &= +\infty, & \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2 &= +\infty. \end{aligned}$$

III.6.11. Ряды из случайных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \xi, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \eta$$

сходятся в среднем квадратическом. Доказать, что

$$M(\xi\eta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k, m=1}^n M(\xi_k \eta_m).$$

III.6.12. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \xi$ сходится в среднем квадратическом, η — случайная величина с $M\eta^2 < \infty$. Доказать, что

$$M(\xi\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} M(\xi_n\eta).$$

III.6.13. Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n = \xi$ из попарно некоррелированных случайных величин сходится в среднем квадратическом (см. задачу III.6.9.). Доказать что

$$M\xi^2 = \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n \right)^2$$

или

$$D\xi = \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n.$$

III.6.14. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем

$$M\xi_n = 0, M\xi_n^2 = 1, M\xi_n^4 \leq c, n \geq 1; c \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\{a_{m,n}; m, n = 1, 2, \dots\} \subset \mathbb{R}$, причем $a_{mn} = a_{nm}$, $n, m \geq 1$. Доказать, что последовательность случайных величин S_n

$$S_n = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} \xi_j \xi_k, n \geq 1,$$

сходится в среднем квадратическом тогда и только тогда, когда сходятся ряды

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{jj}, \quad \sum_{j,k=1}^{\infty} a_{jk}^2.$$

III.6.15. Последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ с $M\xi_n = 0, n \geq 1$, для некоторого числа $r \geq 2$ удовлетворяет условию

$$\sup_{n \geq 1} M \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \right|^r < \infty.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1.

III.6.16. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность неотрицательных случайных величин, для которых

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n < \infty.$$

Доказать, что с вероятностью 1 сходится произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \xi_n).$$

III.6.17. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность гауссовских независимых случайных величин с $M\xi_n = 0, n \geq 1$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2$$

сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2.$$

III.6.18. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин с $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = 1$, $n \geq 1$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n^2; \quad a_n \geq 0, \quad n \geq 1;$$

сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty.$$

III.6.19. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность действительных независимых случайных величин с $M\xi_n = 0$, $n \geq 1$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2 < \infty.$$

Доказать равенство

$$M \exp \left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \right\} = \prod_{n=1}^{\infty} M \exp \{ i \xi_n \}.$$

III.6.20. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с $M\xi_n = 0$, $n \geq 1$. Предположим, что существует случайная величина ξ с $M\xi^2 < \infty$ такая, что при каждом $n \geq 1$ случайные величины $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \xi - \xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_n$ — независимы. Доказать, что при всех $n \geq 1$ $M\xi_n^2 < \infty$ и что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1.

III.6.21. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с $M\xi_n^2 < \infty$, $n \geq 1$. Пусть ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \quad (*)$$

сходится в среднем квадратическом. Доказать, что ряд (*) сходится с вероятностью 1.

III.6.22. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин таких, что для некоторого числа с $P\{|\xi_n| > c\} = 0, n \geq 1$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - M\xi_n)$$

сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n.$$

III.6.23. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых неотрицательных случайных величин таких, что для некоторого числа с $P\{\xi_n > c\} = 0, n \geq 1$. Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n.$$

III.6.24. Доказать, что для сходимости с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

из независимых случайных величин $\xi_n, n \geq 1$, необходимо и достаточно:

а) сходимости рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n;$$

если $\xi_n, n \geq 1$, — гауссовские;

б) сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n,$$

если $\xi_n, n \geq 1$, имеют распределение Пуассона.

III.6.25*. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных гауссовских величин с $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = 1$. Пусть $\{a_n, n \geq 1\}$, $\{b_n, n \geq 1\}$ — последовательности действительных чисел. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \xi_n + b_n)$$

сходится по вероятности, то:

а) ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся;

б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \xi_n + b_n)$ сходится с вероятностью 1.

III.6.26. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда он сходится по вероятности.

III.6.27. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $P\{\xi_n = -1\} = P\{\xi_n = 1\} = \frac{1}{2}$, $n \geq 1$. Доказать, что величина

$$\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \xi_n$$

равномерно распределена на $[-1, 1]$, с помощью результата задачи III.6.19. доказать также тождество

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^n}.$$

III.6.28. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = \sigma^2$, $n \geq 1$; $\{a_n, n \geq 1\}$ — последовательность действительных чисел с

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n = \xi$$

сходится с вероятностью 1 и в среднем квадратическом и что

$$M\xi = 0, M\xi^2 = \sigma^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2.$$

III.6.29. Последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и $\{\eta_n, n \geq 1\}$ называются эквивалентными по Хинчину, если

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_n \neq \eta_n\} < \infty.$$

Доказать, что для эквивалентных по Хинчину последовательностей $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и $\{\eta_n, n \geq 1\}$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда с вероятностью 1 сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$.

III.6.30. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин. Для того, чтобы ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходился с вероятностью 1, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность независимых случайных величин $\{\eta_n, n \geq 1\}$ с $M\eta_n^2 < \infty, n \geq 1$, эквивалентная по Хинчину с $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и такая, что сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\eta_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D\eta_n.$$

III.6.31. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда для некоторого числа $c > 0$ сходятся ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^c, \quad \sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n^c,$$

где

$$\xi^c = \begin{cases} -c, & \xi \leq -c; \\ \xi, & -c < \xi < c; \\ c, & \xi \geq c. \end{cases}$$

III.6.32. Случайные величины последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимы и таковы, что $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = 1$, и для некоторого числа c $P\{|\xi_n| > c\} = 0, n \geq 1$. Пусть $\{a_n, n \geq 1\}$ — последовательность действительных чисел. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 < \infty.$$

III.6.33. При условиях предыдущей задачи доказать, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n$$

сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится с вероятностью 1 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \xi_n)^2.$$

III.6.34. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем $M\xi_n = 0$, $P\{|\xi_n| > c\} = 0, n \geq 1$, с некоторым числом c и

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2 = +\infty.$$

Доказать равенство

$$P\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \right| = +\infty\} = 1.$$

III.6.35. Случайные величины последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимы и удовлетворяют условиям: $M\xi_n = 0$, $P\{|\xi_n| > c\} = 0$, $n \geq 1$, для некоторого числа c .

Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с положительной вероятностью, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n < \infty.$$

Доказать это утверждение.

III.6.36. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных и имеющих показателем распределение случайных величин. Пусть $\{a_n, n \geq 1\}$ — последовательность неотрицательных чисел. Найти необходимое и достаточное условие на $a_n, n \geq 1$, для сходимости с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n.$$

III.6.37. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных по закону Коши случайных величин. Найти необходимое и достаточное условие на последовательность неотрицательных чисел $\{a_n, n \geq 1\}$ сходимости с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n |\xi_n|.$$

III.6.38. Для последовательности независимых неотрицательных случайных величин $\xi_n, n \geq 1$ доказать следующее утверждение:

Для сходимости с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

достаточно, чтобы для некоторого числа $c > 0$, и необходимо, чтобы для любого числа $c > 0$, сходились ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_n > c\}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^{(c)};$$

где

$$\xi(c) = \begin{cases} \xi, & |\xi| \leq c; \\ 0, & |\xi| > c. \end{cases}$$

III.6.39. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых неотрицательных случайных величин. Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1 тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\{\min(\xi_n, 1)\}.$$

III.6.40. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем

$$P\left\{\xi_n = -\frac{1}{\sqrt{n}}\right\} = P\left\{\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right\} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

Положим

$$\xi_0 = 0; \quad \eta_n = \xi_n - \xi_{n-1}, \quad \zeta_n = \xi_n + \xi_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Доказать, что:

- а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$ сходится с вероятностью 1;
- б) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \zeta_n$ расходится с вероятностью 1;
- в) ряды

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} M(\eta_n/\eta_{n-1}, \dots, \eta_1); \\ & \sum_{n=1}^{\infty} M(\zeta_n/\zeta_{n-1}, \dots, \zeta_1); \\ & \sum_{n=1}^{\infty} D(\eta_n/\eta_{n-1}, \dots, \eta_1); \\ & \sum_{n=1}^{\infty} D(\zeta_n/\zeta_{n-1}, \dots, \zeta_1) \end{aligned}$$

расходятся с вероятностью 1.

III.6.41*. Случайные величины $\xi_n, n \geq 1$ независимы, симметричны, а последовательность

$$\{S_n, n \geq 1\}$$

ограничена по вероятности (см. задачу III.3.68). Доказать, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ сходится с вероятностью 1.

Указание. Для доказательства использовать:

а) теорему 3, § 5;

б) неравенство

$$\begin{aligned} & P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k| > c \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=k}^n \xi_j \right| > c \right\} \leq P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=1}^k \xi_j \right| > \frac{c}{2} \right\}; \end{aligned}$$

в) сходимость с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_n^{(c)}), \quad \xi^{(c)} = \begin{cases} \xi, & |\xi| \leq c \\ 0, & |\xi| > c. \end{cases}$$

г) ограниченность по вероятности сумм

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^{(c)}, \quad n \geq 1;$$

д) теорему о трех рядах.

III.6.42*. Пусть $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots, \xi_n, \eta_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин. Если ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n + \eta_n)$$

сходится с вероятностью 1, то существуют такие числа $a_n, n \geq 1$, что с вероятностью 1 сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n + a_n).$$

Указание. Проверить, что из сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \{ |\xi_n + \eta_n| > c \}$$

следует существование чисел $\tilde{a}_n, n \geq 1$, таких, для которых сходится ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \{ |\xi_n + \tilde{a}_n| > c \}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} P \{ |\eta_n - \tilde{a}_n| > c \}.$$

III.6.43*. Доказать, что из сходимости ряда из независимых случайных величин по вероятности следует сходимость этого ряда с вероятностью 1.

Указание. Использовать метод симметризации: рассмотрим величины ξ_n , $n \geq 1$ такие, что $\xi_1, \xi'_1, \xi_2, \xi'_2, \dots, \xi_n, \xi'_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин и при каждом $n \geq 1$ величины ξ_n и ξ'_n имеют одинаковое распределение. Тогда последовательность $\{\xi_n - \xi'_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых симметричных величин, для которой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi'_n)$$

сходится по вероятности. Затем использовать результаты двух предыдущих задач.

III.6.44. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин. Доказать, что из сходимости по распределению ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ следует сходимость этого ряда с вероятностью 1.

III.6.45. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Пуассона. Доказать, что из сходимости по распределению ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ следует сходимость из этого ряда с вероятностью 1.

III.6.46. Последовательность независимых симметричных случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ с $M\xi_n = 0$, $n \geq 1$, удовлетворяет с некоторым числом $r > 0$ условию

$$\sup_{n \geq 1} M \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \right|^r < \infty.$$

Доказать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ сходится с вероятностью 1.

III.6.47. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых симметричных величин. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$ (*) сходится с вероятностью 1, то с вероятностью 1 сходится ряд, полученный произвольной перестановкой членов ряда (*). Доказать это утверждение.

III.6.48. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, а $\{\varphi_n, n \geq 1\}$ — последовательность соответствующих характеристических функций:

$$\varphi_n(t) = M\{\exp(it\xi_n)\}, \quad t \in \mathbb{R}; \quad n \geq 1.$$

Доказать, что сходимость с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

влечет равномерную на каждом конечном интервале сходимость произведения

$$\prod_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

III.6.49. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин таких, что для некоторого числа $c > 0$ $P\{|\xi_n| > c\} = 0, n \geq 1$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n = +\infty.$$

Доказать, что с вероятностью 1

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k \neq 1}^n \xi_k \right| = +\infty.$$

§ 7. УСИЛЕННЫЙ ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Последовательность случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ с $M|\xi_n| < \infty, n \geq 1$, удовлетворяет усиленному закону больших чисел, если

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

с вероятностью 1, т. е. если

$$P\left\{\sup_{n \geq N} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n M\xi_k \right| \geq \varepsilon\right\} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty,$$

для любого $\varepsilon > 0$.

Теорема 1. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $M\xi_n^2 < \infty, n \geq 1$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} D\xi_n < +\infty.$$

Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел.

Теорема 2. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с $M|\xi_1| < \infty$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел:

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = M\xi_1\right\} = 1.$$

III.7.1. Последовательность чисел $\{a_n, n \geq 1\} \subset [0, 1]$ называется равномерно распределенной в смысле Вейля на отрезке $[0, 1]$, если для любой функции f , интегрируемой по Риману на $[0, 1]$, справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(a_1) + f(a_2) + \dots + f(a_n)}{n} = \int_0^1 f(x) dx.$$

Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Доказать, что последовательность $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_n, \dots$ с вероятностью 1 является равномерно распределенной в смысле Вейля на $[0, 1]$.

III.7.2. Последовательности случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и $\{\eta_n, n \geq 1\}$ эквивалентны по Хинчину (см. задачу III.6.29). Доказать, что для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ усиленный закон больших чисел выполняется тогда и только тогда, когда этому закону удовлетворяет последовательность $\{\eta_n, n \geq 1\}$.

III.7.3. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_1 > 0$ или $M\xi_1 = +\infty$. Доказать, что

$$P\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n) = +\infty\} = 1.$$

III.7.4. Для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ случайных величин сходится с вероятностью 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \xi_n$. Доказать, что

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

III.7.5. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин такова, что

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} M \xi_n^2 < \infty; \quad 2) M \xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Доказать, что

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

III.7.6. Доказать, что условие

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_n - M \xi_n}{n} = 0 \right\} = 1$$

является необходимым для справедливости усиленного закона больших чисел для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин с $M |\xi_n| < \infty, n \geq 1$.

III.7.7. Пусть для случайных величин $\xi_n, n \geq 1$, с $M \xi_n = 0, n \geq 1$, справедливо соотношение

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

Доказать, что при любом $\alpha > 0$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \xi_n$$

сходится с вероятностью 1.

III.7.8. Случайные величины ξ_n , $n \geq 2$, независимы и таковы, что

$$P\{\xi_n = -n\} = P\{\xi_n = n\} = \frac{1}{n};$$

$$P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{2}{n}, \quad n \geq 2.$$

Доказать, что для последовательности $\{\xi_n, n \geq 2\}$:

а) расходится ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} D\xi_n = +\infty;$$

б) усиленный закон больших чисел не выполняется.

III.7.9. Последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ такова, что $M\xi_n = 0$, $n \geq 1$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} D\xi_n < \infty.$$

По теореме 1

$$P\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

Доказать, что существует эквивалентная по Хинчину последовательность независимых случайных величин $\{\eta_n, n \geq 1\}$, для которой

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} D\eta_n = +\infty.$$

См. задачу III.7.2.

III.7.10. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин таких, что $M\xi_n = 0$, $P\{|\xi_n| \leq nc\} = 1$, $n \geq 1$ для некоторого числа c и

$$P\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

Доказать, что для любого $\alpha > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2+\alpha}} D\xi_n.$$

III.7.11. Для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин выполняется соотношение

$$P\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

Доказать, что $M|\xi_1| < \infty$.

Указание. Учесть, что

$$P\left\{\frac{1}{n} \xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\right\} = 1$$

и использовать лемму Бореля — Кантелли для доказательства сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| > n\}.$$

III.7.12. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин с $M|\xi_n| < \infty, n \geq 1$, и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} M|\xi_n - M\xi_n| < \infty.$$

Доказать, что

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - M\xi_k) = 0\right\} = 1.$$

III.7.13. Последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ с $M\xi_n = 0, n \geq 1$, удовлетворяет при некотором $r \geq 2$ условие

$$\sup_{n \geq 1} M\left|\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xi_k\right|^r < \infty.$$

Доказать, что

$$P\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

III.7.14. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^4 < \infty$, $n \geq 1$, такова, что:

а) с некоторым числом c

$$M\xi_n^4 \leq c (M\xi_n^2)^2, \quad n \geq 1;$$

$$\text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n M\xi_k^2 \right)^2 < \infty.$$

Доказать, что

$$P\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

III.7.15. Последовательность независимых симметричных случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ с $M\xi_n = 0$, $n \geq 1$, удовлетворяет при некотором $r > 0$ условию

$$\sup_{n \geq 1} M \left| \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xi_k \right|^r < \infty.$$

Доказать, что

$$P\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

III.7.16. Доказать, что почти все относительно меры Лебега числа отрезка $[0, 1]$ имеют в десятичном разложении одинаковое количество цифр 0, 1, 2, ..., 9. Точнее: пусть $v_n(x, i)$ — число цифр i среди первых n десятичных знаков числа x . Доказать, что для почти всех чисел $x \in [0, 1]$ и всех i , $0 \leq i \leq 9$,

$$\frac{1}{n} v_n(x, i) \rightarrow \frac{1}{10}, \quad n \rightarrow \infty.$$

III.7.17. Доказать, что при условии задач III.4.19 и III.4.20:

$$\mathbf{P}\{\bar{x} \rightarrow \mu, n \rightarrow \infty\} = 1, \quad \mathbf{P}\{S^2 \rightarrow \sigma^2, n \rightarrow \infty\} = 1, \\ \mathbf{P}\{F_n(x) \rightarrow F(x), n \rightarrow \infty\} = 1.$$

III.7.18. Если для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин выполняется с некоторым числом c условие

$$\mathbf{D}\xi_n \leq c \frac{n}{\ln^2 n}, \quad n \geq 2,$$

то для этой последовательности выполняется усиленный закон больших чисел. Доказать это утверждение.

III.7.19. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых симметричных величин такая, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|S_{2^n}| > \varepsilon \cdot 2^n\} < \infty.$$

Доказать, что

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n} S_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

III.7.20. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин. Если для любого $\varepsilon > 0$ сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\varepsilon \cdot 2^{2^n} \cdot \left(\sum_{k=1}^{2^n} \mathbf{D}\xi_k\right)^{-1}\right\},$$

то последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ удовлетворяет усиленному закону больших чисел. Доказать это утверждение.

Указание. Использовать то, что при больших значениях A для гауссовской случайной величины ξ с $\mathbf{M}\xi = 0$, $\mathbf{M}\xi^2 = 1$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{|\xi| \geq A\} \sim \frac{2}{A\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}A^2},$$

а также то, что сумма гауссовских независимых величин также гауссовская величина.

III.7.21. Доказать, что для последовательности независимых гауссовских случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$, удовлетворяющих условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} \mathbf{D}\xi_n > 0,$$

не имеет места усиленный закон больших чисел. Для доказательства проверить, что

$$\frac{1}{2^k} \sum_{i=2^{k+1}}^{2^{k+1}} (\xi_i - M\xi_i)$$

не может стремиться к 0 с вероятностью 1.

III.7.22. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых гауссовских случайных величин, причем при всех $n \geq 1$ $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 = 1$. Доказать, что с вероятностью 1 предел

$$\lim_{n_2 - n_1 \rightarrow +\infty} \frac{1}{n_2 - n_1} (\xi_{n_1+1} + \dots + \xi_{n_2})$$

не существует.

III.7.23. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, $\{a_n, n \geq 1\}$ — последовательность положительных чисел таких, что $a_n < a_{n+1}$, $n \geq 1$ и $a_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$. При условии, что ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \xi_n$ сходится с вероятностью 1, доказать, что

$$P \left\{ \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

III.7.24. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин с $M\xi_n = 0$, $M\xi_n^2 < \infty$, $n \geq 1$, и последовательность положительных чисел $\{a_n, n \geq 1\}$ таковы, что $0 < a_n < a_{n+1}$, $n \geq 1$, $a_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n^2} D\xi_n < \infty.$$

Доказать, что

$$P \left\{ \frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

III.7.25. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин; $\{a_n, n \geq 1\}$ — последовательность положительных чисел таких, что с некоторым числом c $a_n \leq ca_{n+1}, n \geq 1$. Если

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\right\} = 1,$$

то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\{|\xi_n| \geq a_n\} < \infty.$$

Доказать это утверждение.

III.7.26. Доказать, что для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$ для любого $\alpha > \frac{1}{2}$ справедливо утверждение

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n^\alpha} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

III.7.27. Для последовательности $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин с $M\xi_1 = \mu$ и $M\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$ в силу усиленного закона больших чисел

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow \mu, n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

Доказать, что для любого $\beta < \frac{1}{2}$

$$\mathbf{P}\left\{n^\beta \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \mu\right) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\right\} = 1.$$

III.7.28. Оценка Хаусдорфа. Для последовательности случайных величин задачи III.7.26 доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 справедливо соотношение

$$\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n = O(n^{1/2+\varepsilon}), n \rightarrow \infty.$$

III.7.29*. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных по закону Коши случайных величин. Доказать, что для любого $\alpha > 0$

$$\mathbf{P}\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^n \xi_k = 0\right\} = 1.$$

См. задачи III.2.30 и III.2.31.

III.7.30*. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с $M\xi_n^2 < \infty, n \geq 1$. Положим

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Доказать, что

$$\eta_n - M\eta_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

в среднем квадратическом, т. е.

$$M(\eta_n - M\eta_n)^2 \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

тогда и только тогда, когда

$$\eta_{2^n} - M\eta_{2^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

в среднем квадратическом.

III.7.31*. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Положим

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Доказать, что $\eta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по вероятности тогда и только тогда, когда $\eta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по вероятности.

Указание. Использовать теорему о непрерывном соответствии между характеристическими функциями и функциями распределения.

III.7.32*. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин. Пусть $\eta_n = n^{-1} S_n, n \geq 1$. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\eta_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} = 1$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P} \{ \eta_{2^n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \} = 1.$$

III.7.33. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность случайных величин, для которой

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

Доказать, что

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2^n} (S_{2^{n+1}} - S_{2^n}) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

III.7.34*. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин. С помощью результата задачи III.7.32 для разнораспределенных величин доказать, что

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1$$

тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2^n} \sum_{k=2^{n+1}}^{2^{n+1}+1} \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

III.7.35*. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ независимых случайных величин такова, что $M\xi_n = 0, n \geq 1$, и для некоторого числа $r \geq 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+r}} M |\xi_n|^{2r} < \infty.$$

Доказать, что:

а)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ \xi_n \neq \eta_n \} < \infty,$$

где

$$\eta_n = \begin{cases} \xi_n, & |\xi_n| \leq n^{\frac{1+r}{2r}} \\ 0, & |\xi_n| > n^{\frac{1+r}{2r}}, n \geq 1; \end{cases}$$

б) с помощью результата задачи III.7.32 для разно-
распределенных слагаемых доказать, что

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

III.7.36. Последовательность $\{\xi_n, n \geq 1\}$ случайных
величин такова, что для некоторого числа c $\mathbf{P}\{|\xi_n| > c\} =$
 $= 0, n \geq 1$. Если

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n^2} \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1,$$

то

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

Доказать это утверждение.

III.7.37. Случайные величины $\xi_n, n \geq 1$ удовлетворяют
условиям:

а) $\mathbf{M}\xi_n = 0, \mathbf{M}\xi_n^4 \leq c, n \geq 1$; c — число;

б) для произвольных различных натуральных чисел $k_1,$
 k_2, k_3, k_4 и неотрицательных целых чисел i_1, i_2, i_3, i_4
с суммой $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 4$ выполняется соотношение

$$\mathbf{M}(\xi_{k_1}^{i_1} \xi_{k_2}^{i_2} \xi_{k_3}^{i_3} \xi_{k_4}^{i_4}) = \prod_{v=1}^4 \mathbf{M}\xi_{k_v}^{i_v}.$$

Доказать, что существует число a , для которого справед-
ливо неравенство

$$\mathbf{M}(\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n)^4 \leq an^2, n \geq 1.$$

III.7.38. При условиях предыдущей задачи доказать,
что

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0, n \rightarrow \infty \right\} = 1.$$

§ 8. МАРТИНГАЛЫ

Последовательность случайных величин $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ называется
мартингалом, если $\mathbf{M}|\zeta_n| < \infty, n \geq 1$, и при каждом $n > 1$

$$\mathbf{M}\{\zeta_n / \zeta_1, \dots, \zeta_{n-1}\} = \mathbf{M}(\zeta_n / F_{n-1}) = \zeta_{n-1}$$

с вероятностью 1. Здесь F_n — σ -алгебра, порожденная величинами $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$; $n \geq 1$.

Последовательность случайных величин $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ называется *супермартингалом*, если $M|\zeta_n| < \infty, n \geq 1$, и при каждом $n \geq 1$

$$M(\zeta_n / F_{n-1}) \leq \zeta_{n-1}$$

с вероятностью 1.

Последовательность случайных величин $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ называется *субмартингалом*, если последовательность $\{-\zeta_n, n \geq 1\}$ — супермартингал.

Теорема. Если $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ — неотрицательный мартингал, то существует с вероятностью 1 предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta_n = \zeta.$$

III.8.1. Пусть $\xi_n, n \geq 1$ — независимые случайные величины; $\eta_n, n \geq 1$, случайные величины, причем при каждом $n \geq 1$ совокупности $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ и $\{\xi_n, \xi_{n+1}, \dots\}$ — независимы. Предположим, что $M\xi_n = 0$ и $M|\xi_n \eta_n| < \infty, n \geq 1$. Доказать, что последовательность

$$\{\zeta_n = \sum_{k=1}^n \eta_k \xi_k, n \geq 1\}$$

является мартингалом.

III.8.2. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ и $\{\eta_n, n \geq 1\}$ — две последовательности случайных величин, причем при каждом $n \geq 1$ существуют совместные плотности распределения вероятностей f_n и g_n наборов $\{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$ и $\{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n\}$ соответственно. Предположим, что при всех $n \geq 1$ и всех $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ $f_n(x_1, \dots, x_n) > 0$. Доказать, что последовательность

$$\left\{ \zeta_n = \frac{g_n(\xi_1, \dots, \xi_n)}{f_n(\xi_1, \dots, \xi_n)}, n \geq 1 \right\} —$$

мартингал.

III.8.3. Пусть $\{\zeta_n, 1 \leq n \leq N\}$ — мартингал, а v — случайная величина, принимающая только значения $1, 2, \dots, N$ и такая, что событие $\{v > n\} \in F_n$. Доказать, что

$$M\zeta_v = M\zeta_1.$$

Указание. Установить формулу

$$\zeta_v = \zeta_1 + \sum_{k=1}^{N-1} \xi_k \chi_k^*,$$

где $\xi_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k$; $\chi_k^* = 1$, если $k \leq v$, и $\chi_k^* = 0$, если $k > v$.

III.8.4. Пусть $\{\zeta_n, 1 \leq n \leq N\}$ — мартингал, а $v = \max\{k: k \leq N, \zeta_1 \leq a, \dots, \zeta_k \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$. Доказать, что последовательность

$$\eta_k = \begin{cases} \zeta_k, & k \leq v \\ 2\zeta_v - \zeta_k, & k > v \end{cases}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

также мартингал.

Указание. Установить формулу

$$\eta_n = \zeta_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k \chi_k^*,$$

где $\xi_k = \zeta_{k+1} - \zeta_k$; $\chi_k^* = 1$, если $k \leq v$, и $\chi_k^* = -1$, если $k > v$.

III.8.5. Используя неравенство

$$\mathbf{P}\{\max_{k \leq n} \zeta_k \geq a\} \leq \mathbf{M}(\chi_a \zeta_n^+), \quad \zeta_n^+ = \max(0, \zeta_n),$$

где

$$\chi_a = \begin{cases} 1, & \max_{k \leq n} \zeta_k > a \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

доказать при $\alpha > 1$ неравенство

$$\mathbf{M}(\max_{k \leq n} \zeta_k^+)^{\alpha} \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha} \mathbf{M}(\zeta_n^+)^{\alpha}.$$

Указание. Воспользоваться равенством

$$\mathbf{M}(\max_{k \leq n} \zeta_k^+) = \alpha \int_0^{\infty} a^{\alpha-1} \mathbf{P}\{\max_{k \leq n} \zeta_k \geq a\} da$$

и неравенством Гельдера.

III.8.6. Пусть $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ — субмартингал. Доказать, что существует неубывающая последовательность случайных величин $\{\eta_n, n \geq 1\}$, (т. е. $\mathbf{P}\{\eta_n \leq \eta_{n+1}\} = 1, n \geq 1$) такая, что $\{\zeta_n - \eta_n, n \geq 1\}$ — мартингал.

Указание. Положим

$$\eta_n = \sum_{k=1}^n \mathbf{M}\{\zeta_k - \zeta_{k-1} / \zeta_1, \dots, \zeta_{k-1}\}, \quad n \geq 1.$$

III.8.7. Пусть $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ — супермартингал. С помощью представления

$$\zeta_n = \theta_n - \eta_n, \quad n \geq 1,$$

где $\{\theta_n, n \geq 1\}$ — мартингал, а $\{\eta_n, n \geq 1\}$ — неубывающая последовательность случайных величин (см. задачу III.8.6), доказать неравенства:

$$\mathbf{P}\{\max_{k \leq n} \zeta_k \geq a\} \leq \frac{1}{a} (\mathbf{M}\zeta_n^+ + \mathbf{M}\zeta_1 - \mathbf{M}\zeta_n), \quad a > 0.$$

III.8.8. Пусть $\{F_n, n \geq 1\}$ — последовательность σ -алгебр такая, что $F_n \subset F_{n+1}$, $n \geq 1$, и F — наименьшая σ -алгебра, содержащая все F_n , $n \geq 1$. Пусть ζ F -измеримая случайная величина такая, что $\mathbf{P}\{\zeta \geq 0\} = 1$ и $\mathbf{M}\zeta < \infty$. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\zeta/F_n) = \zeta\} = 1.$$

Указание. Последовательность

$$\{\eta_n = \mathbf{M}(\zeta/F_n), n \geq 1\} —$$

мартингал.

III.8.9. Пусть $F, F_n, n \geq 1$ — σ -алгебры предыдущей задачи, а ξ — случайная величина с $\mathbf{M}|\xi| < \infty$. Доказать, что последовательность

$$\{\mathbf{M}(\xi/F_n), n \geq 1\} —$$

мартингал, и что

$$\mathbf{P}\{\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{M}(\xi/F_n) = \mathbf{M}(\xi/F)\} = 1.$$

III.8.10. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин с $\mathbf{M}\xi_n = m_n \neq 0$, $n \geq 1$. Доказать, что последовательность

$$\{\zeta_n = \prod_{k=1}^n m_k^{-1} \xi_k, n \geq 1\} —$$

мартингал.

III.8.11. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — независимые случайные величины, причем

$$\mathbf{P}\{\xi_n = 1\} = p, \quad \mathbf{P}\{\xi_n = -1\} = 1 - p = q, \quad 0 < p < 1.$$

Положим

$$\eta_n = \sum_{k=1}^n \xi_k, \quad \zeta_n = \left(\frac{q}{p}\right)^{\eta_n}, \quad n \geq 1.$$

Доказать, что последовательность $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ — мартингал.

III.8.12. Пусть $\{\zeta_n, n \geq 1\}$ — субмартингал. С помощью неравенства Йенсена для условного математического ожидания (см. задачу II.6.34) доказать, что $\{f(\zeta_n), n \geq 1\}$ — субмартингал, если f — непрерывная выпуклая вниз неубывающая на оси функция.

III.8.13. Пусть $\xi_n, n \geq 1$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = \sigma^2$. Доказать, что последовательность

$$\left\{ \left(\sum_{k=1}^n \xi_k \right)^2 - n\sigma^2, n \geq 1 \right\} —$$

мартингал.

ПРОСТЕЙШИЕ ПРОЦЕССЫ МАРКОВА

§ 1. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ

Пусть $P_0, P_1, \dots, P_n, \dots$ — последовательность действительных чисел. Тогда, если ряд

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n$$

сходится в интервале $|z| < z_0$, то функция $P(z)$ называется *производящей функцией* этой последовательности.

Если $P_n = P\{\xi = n\}$, $n \geq 0$, где ξ — некоторая случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения, то соответствующую функцию

$$P_{\xi}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P\{\xi = n\} = Mz^{\xi}$$

называют *производящей функцией* случайной величины ξ . В этом случае ряд $P_{\xi}(z)$ абсолютно сходится по крайней мере для $|z| \leq 1$.

Совместной производящей функцией нескольких случайных величин ξ_1, \dots, ξ_m , принимающих целые неотрицательные значения, называют функцию

$$\begin{aligned} P(z_1, \dots, z_m) &= \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} z_1^{n_1} \dots z_m^{n_m} P\{\xi_1 = n_1, \dots, \xi_m = n_m\} = \\ &= Mz_1^{\xi_1} \dots z_m^{\xi_m}. \end{aligned}$$

Ряд $P(z_1, \dots, z_m)$ сходится по крайней мере для $|z_i| \leq 1$, $i = 1, m$.

IV.1.1. Найти производящую функцию:

а) случайной величины ξ , распределенной по геометрическому закону

$$P\{\xi = n\} = p(1-p)^n, \quad n = 0, 1, \dots; \quad p \in [0, 1],$$

б) случайной величины ξ , распределенной по биномиальному закону

$$P\{\xi = n\} = C_m^n p^n (1-p)^{m-n}, \quad n = \overline{0, m}; \quad p \in [0, 1],$$

в) случайной величины ξ , распределенной по закону Пуассона

$$P\{\xi = n\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots; \quad \lambda > 0,$$

г) случайной величины ξ , принимающей значения $0, 1, \dots, N$ с вероятностями $\frac{1}{N+1}$.

IV.1.2. Может ли двум случайным величинам с разными распределениями отвечать одна и та же производящая функция? Пусть $P(z)$ — производящая функция некоторой ограниченной последовательности $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$. Доказать, что для $-1 < z < +1$ существуют все производные $P^{(n)}(z)$ и $p_n = \frac{1}{n!} P^{(n)}(0)$.

IV.1.3. Найти последовательности, которым соответствуют производящие функции

$$\left(1 - z + \frac{1}{4} z^2\right)^{-1}, \quad a(1 - pz)^{-1}, \quad ze^{z^\lambda - \lambda}.$$

Какие из этих последовательностей при соответствующих значениях параметра могут быть распределениями случайных величин?

IV.1.4. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, принимающие значения $0, 1, \dots, N-1$ с вероятностями $\frac{1}{N}$ и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Найти производящую функцию случайной величины S_n и доказать, что

$$P\{S_n = j\} = \frac{1}{N^n} \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j+Ni} C_n^i C_{-n}^{j-Ni},$$

где для каждого x и целого k

$$C_x^k = \begin{cases} 0 & \text{для } k < 0, \\ 1 & \text{для } k = 0, \\ \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!} & \text{для } k > 0. \end{cases}$$

IV.1.5. Найти n -й член последовательности p_n , $n \geq 0$, с производящей функцией $P(s) = (1 - \sqrt{1 - 4pqs^2})(2qs)^{-1}$, $0 < q = 1 - p \leq 1$. При каком условии: а) p_n является распределением некоторой конечной с вероятностью 1 целочисленной случайной величины ξ ; б) $M\xi < \infty$. Сопоставьте ответ с задачей IV.4.10.

IV.1.6. Независимые случайные величины ξ , η , ζ , принимают целые значения $1, 2, \dots$ и с вероятностями $\frac{1}{n}$.

Найти вероятности: а) $P\{\xi + \eta = \zeta\}$; б) $P\{\xi + \eta = 2\zeta\}$; в) $P\{\xi + \eta + \zeta = n + 1\}$.

IV.1.7. Пусть v — случайная величина, распределенная по геометрическому закону. Найти производящие функции $v_N^+ = \max(N, v)$ и $v_N^- = \min(N, v)$.

IV.1.8. Пусть ξ — случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения с производящей функцией $\varphi(z)$. Найти производящую функцию случайной величины $\zeta = a\xi + b$, где a и b — неотрицательные целые числа.

IV.1.9. Пусть $\varphi_\xi(z)$ — производящая функция случайной величины ξ . Доказать, что производящая функция последовательности $P\{\xi \geq n\}$

$$\psi(z) = (1 - z\varphi_\xi(z))(1 - z)^{-1}.$$

IV.1.10. Найти производящие функции последовательностей:

$$P\{\xi < n\}, \quad P\{\xi \leq n\}, \quad P\{\xi > n\}.$$

IV.1.11. Совместное распределение случайных величин ξ и η , принимающих целые неотрицательные значения, задается соотношениями

$$P\{\xi = n, \eta = k\} = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^n}{n!} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \text{для } n \geq k \geq 0, \\ 0 & \text{для } k > n, \end{cases}$$

где $\lambda > 0$, $p \in [0, 1]$.

Найти совместную производящую функцию случайных величин ξ и η .

IV.1.12. Случайные величины ξ и η принимают целые неотрицательные значения, причем ξ распределена по гео-

метрическому закону с параметром p , а условное распределение величины η относительно ξ

$$\begin{aligned} & P\{\eta = k/\xi = n\} = \\ & = \begin{cases} u(1-u)^k, & k = 0, 1, \dots, \text{если } n \leq N, \\ v(1-v)^k, & k = 0, 1, \dots, \text{если } n > N, \end{cases} \end{aligned}$$

где $u, v \in [0, 1]$. Найти совместную производящую функцию случайных величин ξ и η .

IV.1.13. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения, с производящими функциями $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$. Найти совместное распределение случайных величин ξ и $\gamma = \xi + \eta$.

IV.1.14. Пусть $\varphi(z_1, z_2, \dots, z_m)$ — совместная производящая функция случайных величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m$. Доказать, что

$$\begin{aligned} \varphi(z_1, \dots, z_m) &= \sum_{n_1, \dots, n_m=0}^{\infty} P\{\xi_1 \leq n_1, \dots, \xi_m \leq n_m\} z_1^{n_1} \dots z_m^{n_m} = \\ &= (1-z_1)^{-1} \dots (1-z_m)^{-1} \varphi(z_1, \dots, z_m). \end{aligned}$$

IV.1.15. Пусть n шаров наугад размещают в r ящиках. Через $v_i(n, r)$ обозначим число шаров, которые находятся в i -м ящике. Найти совместную производящую функцию случайных величин $v_i(n, r)$, $i = \overline{1, r}$.

IV.1.16. В условиях предыдущей задачи найти вероятность того, что первые k ящиков будут пустыми.

IV.1.17. Пусть ξ и η — независимые случайные величины, принимающие значения $0, 1, \dots, N$ с вероятностями $\frac{1}{N+1}$. Найти совместную производящую функцию случайных величин ξ и $\gamma = |\xi - \eta|$.

IV.1.18. Пусть $M\xi < \infty$. Доказать, что в этом случае производная соответствующей производящей функции $\varphi'_\xi(z)$ непрерывна на $[-1, 1]$ и $\varphi'_\xi(1) = M\xi$.

IV.1.19. Если $M\xi^k < \infty$, то $\varphi_\xi^{(k)}(z)$ непрерывна на $[-1, 1]$, причем

$$\varphi_\xi^{(k)}(1) = \sum_{l=0}^k a_{lk} M\xi^l,$$

где a_{lk} , $l = \overline{0, k}$ — коэффициенты при соответствующих степенях x полинома $x(x-1)\dots(x-k+1) = \sum_{l=0}^n a_{lk} x^l$. Вы-

писать явные выражения через соответствующие производные для $M\xi^2$ и $M\xi^3$.

IV.1.20. Используя производящие функции, найти математическое ожидание и дисперсию для случайных величин с распределениями, данными в задачах IV.1.1, IV.1.5, IV.1.7.

IV.1.21. Пусть $\varphi(z_1, \dots, z_m)$ — совместная производящая функция случайных величин ξ_1, \dots, ξ_m . Показать, что при $M\xi_i \xi_j < \infty$ смешанная производная $\frac{\partial \varphi(z_1, \dots, z_m)}{\partial z_i \partial z_j}$ непрерывна на m -мерном кубе $[-1, 1] \times \dots \times [-1, 1]$ и

$$M\xi_i \xi_j = \frac{\partial \varphi(z_1, \dots, z_m)}{\partial z_i \partial z_j} \Big|_{z_1=\dots=z_m=1}.$$

Сформулируйте соответствующее утверждение для смешанных моментов более высокого порядка.

IV.1.22. Найти для случайных величин $v_i(n, r)$, $i = \overline{1, r}$, определенных в задаче IV.1.15, $Mv_i(n, r)$ и $Mv_i(n, r)v_j(n, r)$.

IV.1.23. Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, принимающие целые неотрицательные значения и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Доказать, что соответствующие производящие функции связаны соотношениями

$$\varphi_{S_n}(z) = \varphi_{\xi_1}(z) \dots \varphi_{\xi_n}(z).$$

IV.1.24. Доказать, что сумма двух независимых величин, распределенных по закону Пуассона, также распределена по закону Пуассона. Обладают ли этим свойством случайные величины, распределенные по биномиальному закону, геометрическому закону?

IV.1.25. Последовательность P_n , $n = 0, 1, \dots$ строится по рекуррентному закону $P_{n+2} = aP_{n+1} + bP_n$, $n = 0, 1, \dots$

а) Найти производящую функцию $P(s)$ последовательности P_n , $n = 0, 1, \dots$

б) Пусть z_1, z_2 — корни уравнения $bz^2 + az - 1 = 0$. Доказать, что при $|z_1| > |z_2|$

$$P_n \sim \frac{1}{z_2^n} \frac{aP_0 - z_2^{-1}P_0 - P_1}{(z_2^{-1} - z_1^{-1})bz_1z_2}.$$

IV.1.26. Пусть производящая функция последовательности u_n , $n = 0, 1, \dots$, $U(z) = A(z) \cdot B^{-1}(z)$, где $A(z)$ и $B(z)$ — многочлены степени $l < m$ и m , не имеющие общих

корней. Пусть также все корни z_1, \dots, z_m многочлена $B(z)$ разные. Доказать, что производящую функцию $U(z)$ можно единственным способом представить в виде

$$U(z) = a_1(z_1 - z)^{-1} + \dots + a_m(z_m - z)^{-1}.$$

Найти отсюда точное выражение для u_n и показать, что

$$u_n \sim \frac{a_j}{z_j^{n+1}} \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где z_j — наименьший по абсолютной величине корень многочлена $B(z)$.

IV.1.27. Пусть $f_n, n = 0, 1, \dots$, и $a_n, n = 0, 1, \dots$, — две неотрицательные ограниченные последовательности с производящими функциями соответственно $F(z)$ и $A(z)$. Последовательность $u_n, n = 0, 1, \dots$, строится так:

$$u_n = a_n + \sum_{k=0}^n f_k u_{n-k}, \quad n = 0, 1, \dots$$

а) Найти производящую функцию последовательности u_n .

б) Пусть $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$. Доказать, что для того, чтобы

$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n < 1$$

IV.1.28. Найти производящую функцию последовательности $u_n, n = 0, 1, \dots$, которая строится по рекуррентному закону

$$u_{n+3} = \frac{1}{3}(u_{n+2} + u_{n+1} + u_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

Как ведет себя u_n при $n \rightarrow \infty$?

IV.1.29. Найти производящую функцию последовательности $u_n, n = 0, 1, \dots$, которая строится по рекуррентному закону

$$u_{n+k} = \frac{1}{k}(u_{n+k-1} + \dots + u_n), \quad n = 0, 1, \dots$$

IV.1.30. На окружности на одинаковых расстояниях одна от другой взяты $2n$ точек, которые группируются наугад в n пар, и точки каждой из пар соединяются хордой. Найти вероятность того, что построенные n хорд не пересекаются.

IV.1.31. Схемой испытаний Бернулли с l результатами a_1, \dots, a_l называют последовательность независимых случайных величин η_1, η_2, \dots (η_n — результат n -го испытания), которые принимают значения a_1, \dots, a_l с вероятностями p_1, \dots, p_l .

Пусть $v_i(n)$ — число появлений i -го результата a_i в n испытаниях. Найти производящую функцию случайной величины $v_i(n)$. Найти совместную производящую функцию случайных величин $v_1(n), \dots, v_l(n)$.

IV.1.32. Пусть τ_i — номер испытания, в котором впервые появляется i -й результат.

а) Найти производящую функцию случайной величины τ_i .

б) Найти совместную производящую функцию случайных величин τ_1 и τ_2 в схеме испытаний с двумя результатами.

в) Решить предыдущую задачу для схемы испытаний с числом результатов $l > 2$ и найти смешанный момент $M\tau_1\tau_2$.

IV.1.33. Пусть τ_{ir} — номер испытаний, в котором i -й результат появляется r -й раз. Найти производящую функцию случайной величины τ_{ir} , математическое ожидание и дисперсию.

IV.1.34. Пусть μ_{ij} — количество появлений j -го результата до момента первого появления i -го результата.

а) Найти производящую функцию, математическое ожидание и дисперсию случайной величины μ_{ij} .

б) Найти совместную производящую функцию случайных величин μ_{ij} , $j = \overline{1, l-1}$ и смешанный момент $M\mu_{ij}\mu_{ik}$.

IV.1.35. Пусть u_n — вероятность того, что число появлений i -го результата в n испытаниях четно. Вывести для u_n рекуррентное соотношение и, используя его, найти производящую функцию для последовательности u_n .

IV.1.36. Пусть u_n — вероятность того, что число появлений i -го результата в n испытаниях делится на 3, а v_n — вероятность того, что число появлений i -го результата в n испытаниях при делении на 3 дает остаток 1. Вывести для

u_n и v_n систему рекуррентных соотношений и, используя ее, найти производящие функции для последовательностей u_n , $n = 0, 1, \dots$, и v_n , $n = 0, 1, \dots$.

IV.1.37. Пусть u_n — вероятность того, что в n -м испытании впервые появится комбинация результатов $a_i a_j$. Найти соответствующую производящую функцию.

IV.1.38. Решить предыдущую задачу для комбинации трех результатов $a_i a_j a_k$.

IV.1.39. Пусть v_{ir} — случайная величина, представляющая собой число испытаний, которое необходимо произвести для того, чтобы получить подряд r результатов a_i . Доказать, что производящая функция случайной величины v_{ir}

$$\varphi_{ir}(z) = p_i^r z^r (1 - p_i z) (1 - z + p_i^r (1 - p_i) z^{r+1})^{-1}$$

и

$$M v_{ir} = \frac{1 - p_i^r}{p_i^r (1 - p_i)}.$$

IV.1.40. Пусть γ_{in} — наибольшее число результатов a_i , которые появились подряд в n испытаниях, и пусть

$$P_{in}(r) = P\{\gamma_{in} \leq r\}.$$

Найти производящую функцию последовательности $P_{in}(r)$, $n = 1, 2, \dots$, и доказать, что

$$M \gamma_{in} = \frac{\ln n}{\ln \frac{1}{p_i}} + o(1), \quad D \gamma_{in} = o(1).$$

IV.1.41. Пусть v и ξ_1, ξ_2, \dots — независимые в совокупности случайные величины, которые принимают целые неотрицательные значения, причем случайные величины ξ_1, ξ_2, \dots одинаково распределены. Пусть также $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — производящие функции случайных величин v и ξ_1 . Рассмотрим случайную величину $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Показать, что производящая функция случайной величины S_n есть $P(z) = \varphi(\psi(z))$.

IV.1.42. Пусть η_1, η_2, \dots — схема Бернулли с l результатами a_1, \dots, a_l (вероятности i -го результата p_i) и v — независимая от последовательности η_1, η_2, \dots случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения с производящей функцией $\varphi(z)$. Пусть также, как и в за-

даче IV.1.31, $v_i(n)$ — число появлений i -го результата в n испытаниях и $\alpha_i = v_i(v)$ — число появлений i -го результата в случайном числе v испытаний.

а) Найти производящую функцию случайной величины α_i и совместную производящую функцию случайных величин $\alpha_1, \dots, \alpha_l$.

б) Пусть случайная величина v имеет биномиальное распределение с параметрами p, m . Доказать, что в этом случае величина $\alpha_i = v_i(v)$ также распределена по биномиальному закону с параметрами $p_i p$ и m .

в) Пусть случайная величина v имеет распределение Пуассона с параметром λ . Доказать, что в этом случае случайные величины $\alpha_i = v_i(v)$, $i = \overline{1, l}$ независимы и каждая из них также распределена по закону Пуассона.

г) Пусть $Mv^k < \infty$. Доказать, что в этом случае $M\alpha_i^k < \infty$, $i = \overline{1, l}$. С помощью производящих функций найти $M\alpha_i$ и $M\alpha_i\alpha_j$.

IV.1.43. Пусть v имеет распределение Пуассона с параметром λ и пусть v шаров наугад размещены в m ящиках. Доказать, что вероятность найти ровно n ящиков свободными равна

$$C_m^n e^{-\frac{\lambda n}{m}} \left(1 - e^{-\frac{\lambda(n-m)}{m}}\right).$$

IV.1.44. Технический контроль проверяет изделия, каждое из которых независимо от других может с вероятностью p оказаться дефектным, и в этом случае с вероятностью α может быть ошибочно признано исправным.

а) Найти производящую функцию и распределение числа бракованных изделий, которые пропущены техническим контролем в партии из n изделий.

б) Пусть μ — количество изделий, которые прошли через технический контроль до первого пропуска брака включительно. Найти производящую функцию и распределение случайной величины μ .

IV.1.45. Пусть η_1, η_2, \dots — последовательность независимых случайных величин, принимающих два значения: 1 и 0.

$$\eta_n = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p_n, \\ 0 & \text{с вероятностью } q_n' = 1 - p_n. \end{cases}$$

Переменную η_n будем интерпретировать как результат n -го испытания в схеме Бернулли с переменными вероятнос-

тами (результат 1 интерпретируется как «успех»). Число успехов S_n в n испытаниях можно записать в виде суммы $S_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$.

Найти производящую функцию и математическое ожидание случайной величины S_n .

IV.1.46. Рассмотрим схему испытаний Бернулли с переменными вероятностями, для которой вероятность успеха в испытаниях с четными номерами p' , а в испытаниях с нечетными номерами p'' .

а) Пусть τ — номер первого успешного испытания. Найти производящую функцию случайной величины τ .

б) Пусть β — число успешных испытаний до первого успешного испытания с четным номером. Найти производящую функцию случайной величины β .

IV.1.47. Рассмотрим схему испытаний Бернулли с переменными вероятностями, которые описаны в задаче IV.1.45. Пусть u_n — вероятность того, что число успехов в n испытаниях Бернулли четное. Найти рекуррентное соотношение для вероятностей u_n и воспользоваться им для нахождения соответствующей производящей функции.

IV.1.48. Пусть u_n — вероятность того, что комбинация УН впервые появится в $2n$ -м испытании. Найти производящую функцию последовательности u_n .

§ 2. СХЕМА ВОССТАНОВЛЕНИЯ

Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. *Последовательность случайных величин $\tau_0 = 0, \tau_1 = \xi_1, \tau_2 = \xi_1 + \xi_2, \dots$ называют схемой восстановления.* В этом случае величины τ_n интерпретируются как моменты восстановления, а случайные величины ξ_n , как интервалы времени между последовательными восстановлениями.

В связи с практическими задачами наибольший интерес представляют такие функционалы, которые связаны со схемой восстановления:

$$v(t) = \max \left(n : \sum_{k=1}^n \xi_k \leq t \right) — \text{число восстановлений за время } t;$$

$\gamma_t^- = t - \tau_{v(t)}$ — время, которое прошло с момента последнего перед t момента восстановления до момента t ;

$\gamma_t^+ = \tau_{v(t)+1} - t$ — время с момента t до момента следующего после t восстановления,

$$\gamma_t = \gamma_t^- + \gamma_t^+.$$

Важной характеристикой схемы восстановления является функция $N(t) = Mv(t)$, $t \geq 0$, которую называют функцией восстановления.

Во всех сформулированных ниже задачах будем использовать обозначения $F(t) = P\{\xi_1 < t\}$, $t \geq 0$, и считать, что функция распре-

деления $F(x)$ не сосредоточена в нуле, т. е. $F(0+0) < 1$. Через $F(A)$ обозначается мера на борелевской σ -алгебре подмножеств $[0, \infty)$, порожденная функцией распределения $F(t)$ и задаваемая однозначно своими значениями на интервалах $F([a, b]) = F(b) - F(a)$. В теории восстановления очень часто приходится сталкиваться с так называемым уравнением восстановления

$$z(t) = q(t) + \int_0^{t+0} z(t-s) F(ds).$$

Здесь $q(t)$ — известная функция из класса \mathfrak{L} -измеримых, ограниченных на каждом конечном интервале функций на $[0, \infty)$, решение $z(t)$ ищется в классе \mathfrak{L} .

Важную роль в асимптотических задачах теории восстановления играет так называемая теорема восстановления, устанавливающая поведение решения уравнения восстановления при $t \rightarrow \infty$.

Теорема (восстановления). Пусть функция $q(t)$ удовлетворяет условиям: а) множество ее точек разрыва R_q имеет меру Лебега $m(R_q) = 0$, б) $|q(t)| \leq \tilde{q}(t)$ для всех $t \geq 0$, где $\tilde{q}(t)$ — неотрицательная, монотонно невозрастающая функция, интегрируемая по Риману на $[0, \infty)$. Тогда:

1) если функция распределения F неарифметическая, то решение уравнения восстановления

$$z(t) \rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} q(s) ds, \quad t \rightarrow \infty, \quad (1)$$

2) если функция распределения арифметическая с шагом h , то для всех $x \in [0, h)$

$$z(wh + x) \rightarrow \frac{h}{\mu} \sum_{k=0}^{\infty} q(kh + x), \quad h \rightarrow \infty, \quad (2)$$

здесь $\mu = \int_0^{\infty} xF(dx)$ — среднее распределения F и пределы справа в (1)

и (2) следует считать равными нулю, если $\mu = +\infty$.

Замечание. Функция распределения F , сосредоточенная на $[0, \infty)$, называется арифметической, если существует $h > 0$ такое, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} (F(nh + 0) - F(nh)) = 1. \quad (3)$$

Наибольшее $h > 0$, удовлетворяющее (3), называется шагом арифметического распределения F .

IV.2.1. Доказать справедливость такого соотношения между случайными событиями:

$$\{v(t) \geq n\} = \{\xi_1 + \dots + \xi_n \leq t\}.$$

Используя его, показать, что условие $F(0+0) < 1$ является необходимым и достаточным для того, чтобы для каждого $t \geq 0$

$$P\{v(t) < +\infty\} = 1.$$

IV.2.2. Пусть $\varphi(t, z) = Mz^{v(t)}$ — производящая функция случайной величины $v(t)$ и

$$L(s, z) = \int_0^{\infty} e^{-st} \varphi(t, z) dt,$$

$$\psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t).$$

Доказать, что

$$L(s, z) = \frac{1 - \psi(s)}{s(1 - z\psi(s))}.$$

IV.2.3. Пусть величины ξ_k , $k \geq 1$, в схеме восстановления распределены по показательному закону $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $t \geq 0$. Найти функцию распределения величины $v(t)$ и вычислить функцию $N(t)$.

IV.2.4. Пусть величины ξ_k , $k \geq 1$, в схеме восстановления распределены равномерно на промежутке $[0, T]$. Найти функцию распределения случайной величины $v(t)$.

IV.2.5. Величины ξ_k , $k \geq 1$, в схеме восстановления имеют распределение Эрланга порядка r с плотностью

$$P(x) = \frac{1}{r!} \lambda (\lambda x)^{r-1} e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0.$$

Найти функцию распределения случайной величины $v(t)$.

IV.2.6. Пусть $\mu = M\xi_1 = \int_0^{\infty} x dF(x) < \infty$. Доказать, что

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(t)}{t} = \frac{1}{\mu}\right\} = 1.$$

IV.2.7. Доказать, что в том случае, когда $\mu = +\infty$,

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{v(t)}{t} = 0\right\} = 1.$$

IV.2.8. Пусть ξ_k , $k \geq 1$, — неотрицательные случайные величины и $v_t = \max \left(n : \sum_{k=1}^n \xi_k \leq t \right)$. Доказать, что соотношения

$$\sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{n} \xrightarrow{P} d \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

$$\frac{v_t}{t} \xrightarrow{P} \frac{1}{d} \text{ при } n \rightarrow \infty$$

эквивалентны. Показать, что аналогичное утверждение имеет место и для случая сходимости с вероятностью 1.

IV.2.9. Пусть $\mu = M\xi_1$ и $D\xi_1 = b^2 < \infty$. Доказать, что в этом случае

$$P \left\{ \frac{v(t) - \frac{1}{\mu} t}{b\mu^{-3/2} \sqrt{t}} < x \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

IV.2.10. Допустим, что функция распределения случайной величины ξ_1 принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha > 1$, что эквивалентно соотношению

$$P \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{n^{1/\alpha}} < x \right\} \rightarrow P \{ \kappa_\alpha < x \} \text{ при } n \rightarrow \infty, \quad x \geq 0,$$

где κ_α — случайная величина с преобразованием Лапласа $Me^{-sx}_\alpha = e^{-cs^\alpha}$.

Доказать, что в этом случае

$$P \left\{ \frac{v(t)}{t^\alpha} < x \right\} \rightarrow F_\alpha(x) \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad x \geq 0,$$

где функция распределения $F_\alpha(x)$ определяется соотношением

$$F_\alpha(x) = P \{ \kappa_\alpha > x^{-1/\alpha} \}, \quad x \geq 0.$$

IV.2.11. Пусть $F^{*n}(t)$ — n -кратная свертка функции распределения F

$$F^{*n}(t) = \int_0^t F^{*(n-1)}(t-s) F(ds),$$

где

$$F^{*0}(t) = \begin{cases} 1 & \text{для } t > 0, \\ 0 & \text{для } t = 0. \end{cases}$$

Доказать, что

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F^{*n}(t+0).$$

IV.2.12. Пусть

$$L(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} N(t) dt, \quad \psi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(s).$$

Доказать, что

$$L(s) = \frac{\psi(s)}{s(1-\psi(s))}.$$

IV.2.13. Пусть

$$D^*(t) = Mv(t)(v(t)-1).$$

Доказать, что

$$D^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t)).$$

IV.2.14. Пусть $L^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} D^*(t) dt$, где $D^*(t)$ определено в задаче IV.2.13. Доказать, что

$$L^*(s) = \frac{2\psi(s)}{s(1-\psi(s))^2}.$$

IV.2.15. Доказать, что соответствие между функциями $F(t) = P\{\xi_1 < t\}$ и $N(t) = Mv(t)$ в схеме восстановления взаимно однозначно.

IV.2.16. Доказать, что функция $t + a(1 - e^{-t})$ является функцией восстановления тогда и только тогда, когда $a = 0$.

IV.2.17. Пусть η_k , $k \geq 1$, независимая от последовательности ξ_k , $k \geq 1$, последовательность независимых случайных величин, таких, что

$$\eta_k = \begin{cases} 1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } q = 1 - p. \end{cases}$$

Обозначим величины $\xi'_k = \eta_k \xi_k$, $k \geq 1$, и построим по ним схему восстановления. Пусть $N(t)$ и $N'(t)$ — соответственно функции восстановления в исходной схеме, построенной по величинам ξ_k , $k \geq 1$, и в схеме восстановления, построенной по величинам ξ'_k , $k \geq 1$. Доказать, что

$$N'(t) = p^{-1}(N(t) + 1 - p), \quad t \geq 0.$$

IV.2.18. Пусть величины ξ_1, ξ_2, \dots распределены по геометрическому закону

$$P\{\xi_1 = n\} = p(1-p)^{n-1}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Найти распределение случайной величины $v(t)$ и функцию восстановления $N(t)$, $t \geq 0$.

IV.2.19. Пусть величины ξ_k , $k \geq 1$, имеют смещенное показательное распределение с плотностью

$$\lambda e^{-\lambda(x-T)} \quad \text{для } x \geq T.$$

Доказать, что величина $v(t)$ имеет распределение

$$P\{v(t) < r\} = \sum_{k=0}^{r-1} e^{-\lambda(t-r)} \frac{1}{k!} (\lambda(t-rT))^k.$$

IV.2.20. Вычислить функцию $D(t) = Dv(t)$, $t \geq 0$, в задачах IV.2.3, IV.2.5, IV.2.18, IV.2.19.

IV.2.21. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые случайные величины, равномерно распределенные на $[0, 1]$. Пусть также $v(t)$ — число индексов n , которые удовлетворяют неравенству

$$\frac{1}{t} \leq \prod_{k=1}^n \xi_k \leq 1.$$

Найти распределение случайной величины $v(t)$.

IV.2.22. Пусть величины ξ_k распределены по показательному закону с параметром λ . Доказать, что для любых $t, s \geq 0$ случайные величины $v(t)$ и $v(t+s) - v(t)$ независимы и случайная величина $v(t+s) - v(t)$ имеет то же распределение, что и случайная величина $v(s)$.

IV.2.23. Доказать, что для любых моментов времени $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ случайные величины

$$v(t_1), \quad v(t_2) - v(t_1), \quad \dots, \quad v(t_n) - v(t_{n-1})$$

независимы.

IV.2.24. Вычислить функцию $R(t, s) = Mv(t)v(s) - Mv(t)Mv(s)$ для схемы, данной в задаче IV.2.22.

IV.2.25. Пусть величины ξ_k в схеме восстановления определены так:

$$\xi_k = \begin{cases} \tau & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } q = 1 - p, \end{cases}$$

где $p \in [0, 1]$. Найти производящую функцию случайной величины $v(t)$ и функцию $N(t)$.

IV.2.26. Пусть ξ_k , $k = 1, 2, \dots$, и ξ'_k , $k = 1, 2, \dots$, — две последовательности неотрицательных случайных величин, причем для каждого $k \geq 1$ выполняется неравенство $\xi_k \geq \xi'_k$ с вероятностью 1. Доказать, что в этом случае величины $v(t)$ и $v'(t)$ в соответствующих схемах восстановления связаны соотношением

$$P\{v(t) \leq v'(t)\} = 1, \quad t \geq 0.$$

IV.2.27. Доказать, что все моменты случайной величины $v(t)$ конечны:

$$Mv(t)^r < \infty, \quad r \geq 1.$$

IV.2.28. Допустим, что для некоторого $\tau > 0$ выполняется равенство $F(\tau) = 0$. Доказать, что для всех $r \geq 1$

$$t^{-r} Mv(t)^r \rightarrow (M\xi_1)^{-r}, \quad t \rightarrow \infty.$$

IV.2.29. Доказать, что для каждого $r \geq 1$ $\frac{Mv(t)^r}{t^r}$ как функция t ограничена.

IV.2.30. Показать, что для любой схемы восстановления

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{Mv(t)^r}{t^r} = \mu^{-r},$$

здесь $\mu = M\xi_1$ и предел справа нужно считать равным нулю, если $\mu = +\infty$.

IV.2.31. Пусть величины ξ_k имеют устойчивое распределение с параметром α ($\alpha < 1$), т. е.

$$Me^{-s\xi_k} = e^{-cs^\alpha}, \quad \text{где } c > 0 \text{ — некоторое число.}$$

Доказать, что тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t^\alpha} = \frac{1}{c}.$$

IV.2.32. Доказать, что когда величины ξ_k имеют интегрируемую характеристическую функцию и $g(s) - 1 \sim \sim cs \ln s$, то

$$N(t) \sim \frac{1}{c \ln t}.$$

IV.2.33. Пусть $\xi_k^{(n)}$, $k = 1, 2, \dots$, при каждом $n = 0, 1, \dots$ — последовательность независимых, одинаково распределенных неотрицательных случайных величин и $v^{(n)}(t)$ — число восстановлений за время t в схеме восстановления, которая построена по величинам $\xi_k^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$. Допустим, что случайные величины $\xi_1^{(n)} \Rightarrow \xi_1^{(0)}$ при $n \rightarrow \infty$ (символ \Rightarrow обозначает слабую сходимость функций распределений).

Доказать, что в этом случае для всех t , исключая не более, чем счетное число точек T , случайные величины $v^{(n)}(t) \Rightarrow v^{(0)}(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

IV.2.34. Показать, что функции восстановления непрерывны справа и имеют не более, чем счетное число точек разрыва.

Доказать, что в условиях задачи IV.2.33

$$N^{(n)}(t) = Mv^{(n)}(t) \rightarrow N^{(0)}(t) = Mv^{(0)}(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

для всех t , являющихся точками непрерывности функции восстановления $N^{(0)}(t)$.

IV.2.35. Обозначим $U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t)$.

Показать, что $U(t) = N(t - 0) + F^{*0}(t)$ (здесь $N(0 - 0) = 0$). Доказать, что в классе \mathfrak{L} уравнение восстановления имеет единственное решение, задаваемое формулой

$$z(t) = \int_0^{t+0} q(t-s) U(ds),$$

здесь $U(A)$ — мера на борелевской σ -алгебре подмножеств $[0, \infty)$, однозначно определяемая своими значениями на интервалах $U([a, b)) = U(b) - U(a)$.

IV.2.36. Доказать, что $N(t)$ удовлетворяет уравнению восстановления с $q(t) = F(t + 0)$.

IV.2.37. Вывести из теоремы восстановления, что в том случае, когда распределение $F(\cdot)$ неарифметическое, то

$$\frac{U(t+h+0) - U(t+0)}{h} = \frac{N(t+h) - N(t)}{h} \rightarrow \frac{1}{\mu} \quad \text{при } t \rightarrow \infty,$$

и если распределение $F(\cdot)$ арифметическое, то это соотношение выполняется для h , кратных шагу распределения d .

IV.2.38. Доказать, что функция

$$Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(t+0) - \frac{t}{\mu}$$

удовлетворяет уравнению восстановления

$$Z(t) = q(t) + \int_0^{t+0} z(t-s) F ds$$

с функцией

$$q(t) = \frac{1}{\mu} \int_0^{\infty} (1 - F(y+0)) dy.$$

IV.2.39. Показать, что в том случае, когда $\mu = M\xi_1 < \infty$ и $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$, имеет место соотношение

$$U(t) - \frac{t}{\mu} \rightarrow \frac{\sigma^2 + \mu^2}{2\mu^2} \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

Это утверждение уточняет элементарную теорему восстановления (см. задачу IV.2.30).

IV.2.40. Пусть величины ξ_k принимают целые неотрицательные значения. Обозначим $P\{\xi_1 + \dots + \xi_n = k\} = P_k(n)$.

а) Доказать, что $N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k \leq t} P_k(n)$.

б) Пусть $q_k = \sum_{n=1}^{\infty} P_k(n)$. Доказать, что

$$q_k = \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{1}{1 - \psi(s)} \sin ks ds,$$

где $\psi(s)$ — характеристическая функция случайной величины ξ_1 .

в) Доказать, что в том случае, когда $\mu = M\xi_1 < \infty$, $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = \frac{1}{\mu}$.

г) Доказать, что в том случае, когда $\mu = M\xi_1$ и $b^3 = D\xi_1 < \infty$,

$$q_k = \frac{1}{\mu} + o\left(\frac{1}{k}\right).$$

IV.2.41. а) Доказать, что в том случае, когда функция распределения величины ξ_k в схеме восстановления имеет ограниченную плотность $f(t)$, то функция восстановления $N(t)$ также имеет плотность $v(t)$, которая является единственным решением уравнения восстановления с $q(x) = f(x)$, $x \geq 0$.

б) Найти плотность функции восстановления для случая, когда функция распределения $F(x)$ имеет вид, указанный в задачах IV.2.3, IV.2.4, IV.2.5.

в) Доказать, что в том случае, когда $f(x) \leq \hat{f}(x)$, $x \in [0, \infty)$, где $\hat{f}(x)$ — функция, которая монотонно не возрастает и интегрируема на $[0, \infty)$, то плотность функции восстановления

$$v(t) \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty,$$

где $\mu = M\xi_1 \leq \infty$.

г) Доказать, что в общем случае, когда выполняется только условие ограниченности $f(t)$,

$$v(t) - f(t) \rightarrow \frac{1}{\mu} \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

IV.2.42. Пусть $H_t(u) = P\{\gamma_t^+ > u\}$. Доказать, что

$$P\{\gamma_t^- \geq v, \gamma_t^+ > u\} = H_{t-v}(u+v), \quad t-v \geq 0.$$

IV.2.43. Найти совместное распределение величин γ_t и γ_t^+ , γ_t и γ_t^+ , γ_t^+ и γ_t^- .

IV.2.44. Найти совместное распределение величин γ_t^+ и γ_t^- для случая, когда ξ_k имеет показательное распределение.

IV.2.45. Найти распределение величин γ_t^+ и γ_t^- для случая, когда ξ_k распределены по геометрическому закону.

IV.2.46. Найти распределение γ_t^+ , γ_t^- , γ_t , а также совместное распределение величин γ_t^+ , γ_t^- , γ_t в том случае, когда ξ_k имеет распределение Пуассона с параметром λ :

$$P\{\xi_k = n\} = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}, \quad n = 0, 1, \dots$$

IV.2.47. Для случая, когда величины ξ_k , $k \geq 1$, распределены по показательному закону, найти $M\gamma_t$ и показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M\gamma_t = 2M\xi_1.$$

IV.2.48. Доказать, что в том случае, когда величины ξ_k имеют показательное распределение, величины $v(t)$ и γ_t^+ независимы.

IV.2.49. Пусть величины ξ_k имеют биномиальное распределение

$$P\{\xi_k = l\} = C_m^l p^l (1-p)^{m-l}, \quad l = \overline{0, m},$$

где $0 < p < 1$, m — натуральное число. Найти распределение величин γ_t^- , γ_t^+ и γ_t , когда $t > m$.

IV.2.50. Доказать, что $H_t(u)$ как функция t удовлетворяет уравнению восстановления с $q(t) = 1 - F(t+0)$. Используя теорему восстановления, показать, что в том случае, когда $\mu = M\xi_1 < \infty$, функция распределения F неарифметическая

$$H_t(u) \rightarrow \frac{1}{\mu} \int_0^\infty (1 - F(s+u+0)) ds$$

и

$$P\{\gamma_t^- > v, \gamma_t^+ > u\} \rightarrow \frac{1}{\mu} \int_{u+v}^\infty (1 - F(s+0)) ds.$$

IV.2.51. Доказать, что в том случае, когда $M\xi_1 < \infty$, то $M\gamma_t^+ < \infty$ и как функция t удовлетворяет уравне-

нию восстановления с функцией $q(t) = \int_0^\infty (1 - F(t+u+0)) du$. Используя теорему восстановления, доказать, что в том случае, когда функция распределения F неарифметическая и $M\xi_1^2 < \infty$, то существует конечный предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M\gamma_t^+ = \frac{M\xi_1^2}{2}.$$

IV.2.52. Пусть F — неарифметическая функция распределения и $\mu = M\xi_1 < \infty$, $M\xi_1^2 = +\infty$. Показать, что в этом случае

$$\lim_{t \rightarrow \infty} M\gamma_t^+ = +\infty.$$

IV.2.53. Покажите, что справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{v(t+h) - v(t) = r\} &= \delta(r, 0) \mathbf{P}\{\gamma_t^+ > h\} + \\ &+ \int_0^{h+0} \mathbf{P}\{v(h-s) + 1 = r\} \mathbf{P}\{\gamma_h^+ \in ds\}. \end{aligned}$$

Используя задачу IV.2.52, покажите, что в условиях этой задачи существует $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{v(t+h) - v(t) = r\}$ и вычислите этот предел (через F и распределения случайных величин $v(h)$ для $0 \leq u \leq h$).

IV.2.54. Доказать, что в том случае, когда $F(t)$ — непрерывная функция, то граничное распределение γ_t^+ , при $t \rightarrow \infty$ имеет плотность.

IV.2.55. Функция распределения величины ξ_k имеет плотность $p(t)$. Показать, что совместное распределение величин γ_t^- и γ_t^+ при $t \rightarrow \infty$ имеет плотность

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\gamma_t^+ < u, \gamma_t^- < v\} = \frac{1}{M_{\xi_1}} p(u+v),$$

а плотность граничного распределения величины γ_t при $t \rightarrow \infty$ равна $\frac{u}{M_{\xi_1}} p(u)$.

IV.2.56. Пусть $\tau = \inf(t: \gamma_t^- > v)$ — момент появления первого пропуска между восстановлениями, большего v

а) Доказать, что вероятность $\mathbf{P}\{\tau \leq s\} = v(s)$ удовлетворяет уравнению

$$v(t) = z(t) + \int_0^{t+0} v(t-s) dG(s),$$

где

$$\begin{aligned} z(t) &= \begin{cases} 0 & \text{для } t \leq v, \\ 1 - F(v) & \text{для } t > v. \end{cases} \\ G(x) &= \begin{cases} F(x) & \text{для } x \leq v, \\ F(s) & \text{для } x > v. \end{cases} \end{aligned}$$

б) Найти распределение величины τ для случая, когда

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

IV.2.57. Доказать, что в том случае, когда величины ξ_k неограничены (т. е. для всех n выполняется неравен-

ство $P\{\xi_k \geq n\} > 0$) и имеет решеточное распределение с шагом 1, то для каждого натурального k из событий $\{\gamma_t^+ = k\}$, $t = 1, 2, \dots$, с вероятностью 1 выполняется бесконечное число событий.

§ 3. ОБОБЩЕННЫЙ ПРОЦЕСС ПУАССОНА

Пусть τ_k , $k \geq 1$, и ξ_n , $n \geq 1$, — две последовательности случайных величин, удовлетворяющие условиям:

- а) последовательности τ_k , $k \geq 1$, и ξ_n , $n \geq 1$ — независимы;
- б) величины τ_k , $k \geq 1$, — независимы и имеют показательное распределение с параметром λ :

$$P\{\tau_1 > x\} = e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0;$$

в) величины ξ_n , $n \geq 1$, — независимы и распределены одинаково с функцией распределения $F(x)$.

С последовательностями τ_k , $k \geq 1$, и ξ_n , $n \geq 1$, свяжем случайные процессы

$$v(t) = \max(n: \sum_{k=1}^n \tau_k \leq t), \quad t \geq 0,$$

который называют процессом Пуассона, и

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \xi_k, \quad t \geq 0,$$

который называют обобщенным процессом Пуассона.

IV.3.1. Доказать, что процесс $\xi(t)$ представляет собой процесс с независимыми приращениями, т. е. для любых моментов времени $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$ величины $\xi(t_1)$, $\xi(t_2) - \xi(t_1)$, \dots , $\xi(t_n) - \xi(t_{n-1})$ независимы.

IV.3.2. Доказать, что процесс $\xi(t)$ представляет собой однородный процесс с независимыми приращениями (т. е. для каждого $t \geq 0$ распределение величин $\xi(s+t) - \xi(s)$ совпадает для всех $s \geq 0$).

IV.3.3. Доказать, что характеристическая функция величины $\xi(t)$ имеет вид

$$Me^{iz\xi(t)} = e^{-\lambda t \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - e^{izx}) dF(x)}.$$

IV.3.4. Найти распределение $\xi(t)$ для случая, когда величины ξ_k распределены: а) показательно, б) по геометрическому закону, в) принимают два значения 0 и 1 с вероятностями p и $q = 1 - p$.

IV.3.5. Пусть $v(t) = \max(n: \sum_{k=1}^n \tau_k \leq t), t \geq 0$, — процесс Пуассона с параметром λ . Моменты скачков процесса $\chi_n = \tau_1 + \dots + \tau_n, n = 1, 2, \dots$, можно интерпретировать, как моменты прихода заявок в некоторую систему обслуживания. Допустим, что каждая заявка, независимо от остальных, принимается системой на обслуживание с вероятностью p , а с вероятностью $q = 1 - p$ получает отказ. Пусть $\tau'_n, n = 1, 2, \dots$, промежутки времени между последовательными моментами прихода требований, принятых на обслуживание, и $v'(t) = \max(n: \sum_{k=1}^n \tau'_k \leq t), t \geq 0$, — процесс восстановления, построенный по величинам $\tau'_n, n = 1, 2, \dots$. Доказать, что процесс $v'(t), t \geq 0$, также является процессом Пуассона с параметром λp .

IV.3.6. Пусть $M|\xi_1|^k < \infty$. Доказать, что в этом случае $M|\xi(t)|^k < \infty$. Найти выражение для $M\xi(t)$ и $D\xi(t)$ через $a = M\xi_1$ и $\sigma^2 = D\xi_1$.

IV.3.7. Доказать, что в том случае, когда $M\xi_1 = a$, существует

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\xi(t)}{t} = \lambda a\right\} = 1.$$

IV.3.8. Доказать, что в том случае, когда $M\xi_1 = a$ и $M\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$

$$P\left\{\frac{\xi(t) - \lambda at}{\sqrt{\sigma^2 \lambda t}} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

IV.3.9. Доказать, что

$$P\{\xi(t) < x\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^n F^{n*}(x),$$

где $F^{n*}(x)$ — n -кратная свертка функции распределения $F(x)$.

IV.3.10. Доказать, что функция $H(t, x) = \mathbf{P}\{\xi(t) < x\}$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$H(t, x) = \chi_{(0, \infty)}(x) e^{-\lambda t} + \\ + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \lambda H(t-s, x-z) e^{-\lambda s} ds dF(z).$$

IV.3.11. Допустим, что каждому полуинтервалу прямой $[a, b)$ поставлена в соответствие случайная величина $v[a, b)$ так, что выполняются условия:

- 1) $v[a, b)$ имеет только целые неотрицательные значения;
- 2) если $a_1 < \dots < a_n$, то случайные величины $v[a_1, a_2), \dots, v[a_{n-1}, a_n)$ — независимы;
- 3) если $a < c < b$, то $v[a, b) = v[a, c) + v[c, b)$;
- 4) существует такая непрерывная монотонно возрастающая функция $\varphi(t)$, что равномерно по $b - a \rightarrow 0$;

$$\mathbf{P}\{v[a, b) > 0\} = (\varphi(b) - \varphi(a)) + o(|\varphi(b) - \varphi(a)|),$$

$$\mathbf{P}\{v[a, b) > 1\} = o(|\varphi(b) - \varphi(a)|).$$

Доказать, что тогда

$$\mathbf{P}\{v[a, b) = r\} = \frac{1}{r!} (\varphi(b) - \varphi(a))^r e^{-(\varphi(b) - \varphi(a))}.$$

IV.3.12. Пусть $v(t)$, $t \geq 0$, — процесс Пуассона с параметром λ . Пусть также $\varphi(t) \geq 0$ — функция, монотонно возрастающая и дифференцируемая.

Доказать, что процесс $v(\varphi(t))$, $t \geq 0$, является процессом с независимыми приращениями, т. е. для любых моментов времени $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ величины $v(\varphi(t_1))$, $v(\varphi(t_2)) - v(\varphi(t_1))$, \dots , $v(\varphi(t_n)) - v(\varphi(t_{n-1}))$ независимы. Доказать также, что величины $v[a, b) = v(\varphi(b) - \varphi(a))$ удовлетворяют условиям 1)–4), сформулированным в предыдущей задаче.

IV.3.13. Пусть $\xi(t)$ — обобщенный процесс Пуассона с параметром соответствующего процесса Пуассона λ и с функцией распределения скачков $F(x)$, а $g(x)$ — некоторая непрерывная функция. Обозначим

$$\zeta_{t, x} = \int_0^t g(x + \xi(s)) ds.$$

Вывести такое интегральное уравнение для характеристической функции величины $\zeta_{t,x}$, $U_z(t, x) = M e^{iz\zeta_{t,x}}$:

$$U_z(t, x) = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda s + izg(x)s} U_z(t-s, x+y) dF(y) ds + e^{izg(x)t} e^{-\lambda t}.$$

IV.3.14. Пусть $\xi_k^{(1)}$, $k \geq 1$, и $\xi_k^{(2)}$, $k \geq 1$, — две независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин соответственно с функциями распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Пусть также τ_k , $k \geq 1$, — независимая от последовательностей $\xi_k^{(1)}$, $k \geq 1$, и $\xi_k^{(2)}$, $k \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных по показательному закону с параметром λ величин. Рассмотрим два обобщенных процесса восстановления:

$$\xi_j(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \xi_k^{(j)}, \quad t \geq 0, \quad j = 1, 2,$$

где $v(t) = \max(n: \sum_{k=1}^n \tau_k \leq t)$.

а) Будет ли линейная комбинация процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — процесс $\xi(t) = a_1 \xi_1(t) + a_2 \xi_2(t)$ — обобщенным процессом восстановления?

б) Найти совместную характеристическую функцию процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

IV.3.15. Пусть $\tau_k^{(1)}$, $k \geq 1$, и $\tau_k^{(2)}$, $k \geq 1$, — две независимые последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин. Величины $\tau_k^{(1)}$ распределены по показательному закону с параметром λ_1 , а величины $\tau_k^{(2)}$ — по показательному закону с параметром λ_2 . Пусть также ξ_k , $k \geq 1$, независимая от последовательностей $\tau_k^{(1)}$, $k \geq 1$, и $\tau_k^{(2)}$, $k \geq 1$, — последовательность независимых одинаково распределенных величин с функцией распределения $F(x)$.

Рассмотрим два обобщенных процесса восстановления,

$$\xi_j(t) = \sum_{k=1}^{v_j(t)} \xi_k, \quad j = 1, 2,$$

где $v_j(t) = \max(n: \sum_{k=1}^n \tau_k^{(j)} \leq t)$ — число восстановлений за время t в простом процессе восстановления, построенном по величинам $\tau_k^{(j)}$, $k \geq 1$, $j = 1, 2$.

а) Будет ли линейная комбинация $a_1 \xi_1(t) + a_2 \xi_2(t)$, $t \geq 0$, процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ обобщенным процессом восстановления?

б) Найти совместную характеристическую функцию процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

IV.3.16. Пусть $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — два независимых обобщенных процесса восстановления с характеристическими функциями

$$M e^{i z \xi_j(t)} = e^{-\lambda_j t} \int_0^\infty (1 - e^{i z x}) dF_j(x), \quad j = 1, 2.$$

а) Будет ли линейная комбинация процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ — процесс $\xi(t) = a_1 \xi_1(t) + a_2 \xi_2(t)$, $t \geq 0$, — обобщенным процессом восстановления?

б) Найти характеристическую функцию процесса $\xi(t)$.

IV.3.17. Пусть A_1, \dots, A_l — попарно непересекающиеся борелевские подмножества $R_1 = (-\infty, +\infty)$ и $\xi(t, A_i) = \sum_{k=1}^{v(t)} \chi_{A_i}(\xi_k)$, где $\chi_A(x)$ — индикатор множества A .

а) Доказать, что случайные величины $\xi(t, A_i)$, $i = \overline{1, l}$ — независимы в совокупности, и найти характеристическую функцию случайной величины $\xi(t, A_i)$.

б) Пусть A_1, A_2 — борелевские подмножества R_1 и $A = A_1 \cap A_2$. Найти общую характеристическую функцию случайных величин $\xi(t, A_1)$ и $\xi(t, A_2)$.

IV.3.18. Пусть величины

$$\xi_k = \begin{cases} +1 & \text{с вероятностью } p, \\ -1 & \text{с вероятностью } q = 1 - p, \end{cases}$$

где $p, q > 0$ и $p + q = 1$.

а) Найти распределение величины $\xi(t)$.

б) Найти преобразование Лапласа для случайной величины

$$\tau(x) = \inf(t: t > 0, \xi(t) = x), \quad x = 1, 2, \dots$$

IV.3.19. Пусть $\xi(t)$ — обобщенный процесс Пуассона,

скачки которого ξ_k неположительны с вероятностью 1 и имеют распределение $F(x)$. Обозначим

$$\zeta(t) = \gamma t + \xi(t), \quad t \geq 0, \quad \text{здесь } \gamma > 0.$$

Найти условие того, что

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \geq 0} \zeta(t) < +\infty\} = 1.$$

IV.3.20. Пусть $\nu(t)$, $t \geq 0$, — процесс Пуассона с параметром λ , $\gamma < 0$.

а) Доказать, что процесс $\zeta(t) = \nu(t) + \gamma t$, $t \geq 0$, ограничен сверху

$$\mathbf{P}\{\sup_{t \geq 0} \zeta(t) < +\infty\} = 1$$

тогда и только тогда, когда $|\gamma| > \lambda$.

б) Показать, что

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq t < \infty} \zeta(t) \leq 0\right\} = \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} e^{-kc} \left(1 + kc + \frac{(kc)^2}{2!} + \dots + \frac{(kc)^{k-1}}{(k-1)!} + \dots\right)\right\},$$

где $c = \frac{\lambda}{|\gamma|}$.

в) Для процесса $\zeta(t)$ показать, что функция

$$Q(t, x) = \mathbf{P}\left\{\sup_{0 \leq s \leq t} \zeta(s) < x\right\}, \quad x > 0,$$

удовлетворяет интегральному уравнению

$$Q(t, x) = e^{-\lambda t} + \int_{\frac{1-x}{|\gamma|}}^t \lambda e^{-\lambda s} Q(t-s, x - \gamma s + 1) ds.$$

IV.3.21. Пусть $\xi(t)$ — обобщенный процесс Пуассона, скачки которого ξ_n неотрицательны ($F(0) = 0$) и $\gamma = \text{const} > 0$. Рассмотрим случайные величины

$$\Theta(x) = \inf(n: \gamma n - \xi(n) > x).$$

а) Доказать, что случайная величина $\Theta(x + y)$ распределена как и случайная величина $\Theta(x) + \bar{\Theta}(y)$, где $\bar{\Theta}(y)$ — независимая от $\Theta(x)$ случайная величина, которая распределена так же, как и $\Theta(y)$.

- б) Доказать, что величина $\Theta(x) \xrightarrow{P} 0$ при $x \rightarrow 0$.
 в) Доказать, что

$$M e^{-s\Theta(x)} = e^{-x\omega(s)}.$$

г) Обозначим $H(x, y) = P\{\Theta(x) < y\}$. Доказать, что вероятности $H(x, y)$, $x \geq 0$, удовлетворяют интегральному уравнению

$$H(x, y) = \chi_{\left[\frac{x}{\gamma}, \infty\right)}(y) e^{-\frac{\lambda x}{\gamma}} + \int_0^{\frac{x}{\gamma}} \int_0^{\infty} \lambda H(x + z - u\gamma, y - u) e^{-\lambda u} dF(z) du.$$

д) Пусть

$$M e^{-s\xi(t)} = e^{-t\Phi(s)}, \text{ где } \Phi(s) = \lambda \int_0^{\infty} (1 - e^{-sx}) dF(x).$$

Доказать, что функция $\omega(s)$ удовлетворяет уравнению $\omega(s) = \gamma^{-1}(s + \Phi(\omega(s)))$.

е) Доказать, что для положительных s уравнение

$$z = \gamma^{-1}(s + \Phi(z))$$

имеет только одно неотрицательное решение z_s и поэтому $\omega(s) = z_s$.

ж) Доказать, что если $s \rightarrow 0$, то $\omega(s) \rightarrow \omega$, где ω — наибольшее неотрицательное решение уравнения $z = \gamma^{-1}\Phi(z)$. Пусть $a = \int_0^{\infty} x dF(x)$. Доказать, что $\omega = 0$, если $0 \leq \frac{\lambda a}{\gamma} \leq 1$, и $\omega > 0$, если $\frac{\lambda a}{\gamma} > 1$.

з) Доказать, что

$$P\left\{\sup_{0 \leq u \leq t} (\gamma u - \xi(u)) < x\right\} = 1 - P\{\Theta(x) \leq t\}.$$

Воспользовавшись этим соотношением, доказать такое соотношение:

$$P\left\{\sup_{0 \leq u < \infty} (\gamma u - \xi(u)) \leq x\right\} = 1 - e^{-x\omega}.$$

IV.3.22. Пусть τ_k , $k \geq 1$, и ξ_k , $k \geq 1$, — две независимые последовательности независимых одинаково распре-

деленных величин, причем величины τ_k неотрицательны и $P\{\tau_1 > 0\} > 0$. Рассмотрим случайный процесс $\xi(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \xi_k$, $t \geq 0$, где

$$v(t) = \max \left(n: \sum_{k=1}^n \tau_k \leq t \right).$$

а) В каком случае процесс $\xi(t)$ есть обобщенный процесс восстановления?

б) Доказать, что

$$\int_0^{\infty} e^{-st} M e^{iz\xi(t)} dt = \frac{1 - \varphi(s)}{s(1 - \varphi(s)\psi(z))},$$

где

$$\varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dP\{\tau_1 < t\}, \quad \psi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dP\{\xi_1 < x\}.$$

в) Пусть $M\xi_1 = a$. Доказать, что

$$M\xi(t) = aMv(t).$$

г) Пусть $D\xi_1 = \sigma^2$. Доказать, что

$$M\xi^2(t) = \sigma^2 Mv(t) + a^2 (Mv(t))^2.$$

д) Доказать, что в том случае, когда существует $M\xi_1 = a$, то

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} v^{-1}(t) \xi(t) = a\} = 1.$$

IV.3.23. а) При каком условии процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, определенный в задаче IV.3.22, ограничен сверху, т. е.

$$P\{\sup_{t \geq 0} \xi(t) < +\infty\} = 1?$$

б) Пусть $\tau_x = \inf\{t: \xi(t) > x\}$ и $Q(t, x) = P\{\tau_x > t\}$. Вывести такое уравнение для $Q(t, x)$

$$Q(t, x) = P\{\tau_1 > t\} + \\ + \int_0^t dF(s) \int_{-\infty}^x dG(y) Q(t-s, x-y), \quad x \geq 0,$$

где

$$F(s) = P\{\tau_1 < s\}, \quad G(y) = P\{\xi_1 < y\}.$$

IV.3.24. Пусть $\{\tau_k, \xi_k\}$, $k \geq 1$, — последовательность независимых, одинаково распределенных случайных векторов, причем первые компоненты τ_k неотрицательны и $P\{\tau_1 > 0\} > 0$. Рассмотрим случайный процесс

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{v(t)} \xi_k, \quad t \geq 0, \quad \text{где } v(t) = \max\left(n: \sum_{k=1}^n \tau_k \leq t\right).$$

а) Доказать, что

$$\Phi(s, z) = \int_0^\infty e^{-st} M e^{iz\xi(t)} dt = \frac{1 - \varphi(s, 0)}{s(1 - \varphi(s, z))},$$

где $\varphi(s, z) = M e^{-s\tau_1 + iz\xi_1}$.

б) Пусть $M\xi_1 = a$. Доказать, что

$$M \sum_{k=1}^{v(t)+1} \xi_k = a[Mv(t) + 1].$$

в) Пусть $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Доказать, что

$$M \left[\sum_{k=1}^{v(t)+1} \xi_k \right]^2 = \sigma^2 (Mv(t) + 1).$$

IV.3.25. Пусть $\xi(t)$ — процесс, определенный в задаче IV.3.24.

а) Доказать, что если существует $M\tau_1 = a$ и $M\xi_1 = c$, то

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \xi(t) = a^{-1}c\} = 1.$$

б) Пусть существует $M\tau_1 = a < \infty$ и $M\xi_1 = 0$, $M\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Доказать, что

$$\frac{\sum_{k=1}^{v(t)} \xi_k - \sum_{k=1}^{[a^{-1}t]} \xi_k}{\sqrt{t}} \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

в) Доказать, что в том случае, если существует $M\tau_1 = a$, $M\xi_1 = 0$ и $M\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$, то

$$P\left\{\frac{\xi(t)}{\sqrt{c^{-1}\sigma^2 t}} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

г) Доказать, что в том случае, когда существуют $M\tau_1 = a$, $M\gamma_1 = c$ и $M(\gamma - a^{-1}c\tau_1)^2 = \sigma^2 < \infty$, то

$$P\left\{\frac{\xi(t) - a^{-1}ct}{\sqrt{a^{-1}t\sigma^2}} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

§ 4. СЛУЧАЙНЫЕ БЛУЖДЕНИЯ

Пусть $S_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — последовательность независимых случайных величин, причем случайные величины одинаково распределены. Последовательность случайных величин $S_0, S_1 = S_0 + \xi_1, S_2 = S_0 + \xi_1 + \xi_2, \dots$ называют случайным блужданием. Величины ξ_n представляют собой скачки блуждания, S_n — положение блуждания после n -го скачка.

Блуждание называют целочисленным, если скачки блуждания ξ_n и начальное положение S_0 являются целочисленными случайными величинами. В задачах, в которых специально это не оговаривается, считается, что $S_0 \equiv 0$.

IV.4.1. Доказать, что для $|y| \leq n$

$$P_{n,y} = P\{S_n = y\} = \begin{cases} 0, & \text{если } n - y \text{ — нечетное,} \\ 2^{-n} C_n^{n-y}, & \text{если } n - y \text{ — четное.} \end{cases}$$

Замечание. В задачах IV.4.1—IV.4.8 S_n — простейшее симметричное целочисленное блуждание Бернулли, для которого

$$\xi_n = \begin{cases} +1 & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}, \\ -1 & \text{с вероятностью } \frac{1}{2}. \end{cases}$$

IV.4.2. Доказать, что для $x, y > 0$

$$P\{S_n = y, \min_{1 \leq k \leq n} S_k \leq 0 / S_0 = x\} = P\{S_n = y / S_0 = -x\} = P_{n,y+x}.$$

IV.4.3. Показать, что для $0 < y \leq n$

$$\begin{aligned} P\{S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n = y\} &= \\ &= \frac{1}{2} [P_{n-1,y-1} - P_{n-1,y+1}] = \\ &= \begin{cases} 2^{-n} \frac{y}{n} C_n^{n-y}, & \text{если } n - y \text{ — четное,} \\ 0, & \text{если } n - y \text{ — нечетное.} \end{cases} \end{aligned}$$

IV.4.4. Показать, что для $0 < y \leq n$

$$\begin{aligned} P\{S_1 < S_n, S_2 < S_n, \dots, S_{n-1} < S_n = y\} = \\ = P\{S_1 > 0, \dots, S_{n-1} > 0, S_n = y\}. \end{aligned}$$

IV.4.5. Показать, что

$$\begin{aligned} P\{S_1 > 0, S_2 > 0, \dots, S_{2n-1} > 0, S_{2n} = 0\} &= \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} 2^{-2n}, \\ P\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-1} \geq 0, S_{2n} = 0\} &= \frac{1}{n+1} C_{2n}^n 2^{-2n}. \end{aligned}$$

IV.4.6. Показать, что

$$\begin{aligned} U_{2n} = P\{S_{2n} = 0\} &= P\{S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0\} = \\ &= P\{S_1 \geq 0, S_2 \geq 0, \dots, S_{2n} \geq 0\} = C_{2n}^n 2^{-2n}. \end{aligned}$$

IV.4.7. Показать, что

$$\begin{aligned} f_{2n} &= P\{S_1 \neq 0, \dots, S_{2n-1} \neq 0, S_{2n} = 0\} = \\ &= P\{S_1 \geq 0, \dots, S_{2n-2} \geq 0, S_{2n-1} < 0\} = \\ &= U_{2n-2} - U_{2n} = \frac{1}{2n} U_{2n-2} = \frac{1}{2n} C_{2n-2}^{n-1} 2^{-2n}. \end{aligned}$$

IV.4.8. Используя задачу IV.4.4 и IV.4.3, показать, что вероятность того, что блуждание (с начальным положением $S_0 = 0$) впервые достигнет точки $0 < y \leq n$ в момент $2n - y$

$$f_{2n}^{(y)} = \frac{y}{2n - y} C_{2n-y}^n 2^{-2n+y}.$$

IV.4.9. Доказать, что вероятность

$$\begin{aligned} P\{S_n = y / S_0 = 0\} = \\ = \begin{cases} 0, & \text{если } n - y \text{ — нечетное,} \\ C_n^{\frac{n+y}{2}} p^{\frac{n+y}{2}} \bar{p}^{\frac{n-y}{2}}, & \text{если } n - y \text{ — четное} \end{cases} \end{aligned}$$

при $|y| \leq n$.

Замечание. В задачах IV.4.9—IV.4.18 S_n — простейшее целочисленное блуждание Бернулли, для которого

$$\xi_n = \begin{cases} +1 & \text{с вероятностью } p, \\ -1 & \text{с вероятностью } q, \end{cases}$$

где $p, q > 0, p + q = 1$.

IV.4.10. Рассмотрим случайную величину $\tau_x = \min(n: n \geq 1, S_n = x)$ — момент достижения блужданием

S_n , $n \geq 0$, точки $x \geq 0$. Доказать, что случайная величина τ_x ($x > 0$) распределена так, как и $\tau^{(1)} + \dots + \tau^{(x)}$, где $\tau^{(x)}$ — независимые случайные величины, распределенные одинаково с величиной τ_1 . Найти производящую функцию случайных величин τ_1 и τ_x .

IV.4.11. Найти производящую функцию случайной величины τ_0 и доказать, что $\tau_0 < \infty$ с вероятностью 1 только в том случае, когда $p = q = \frac{1}{2}$.

IV.4.12. Пусть P_x — вероятность того, что блуждание когда-нибудь достигнет точки x . Доказать, что

$$P_x = \begin{cases} 1, & \text{если } p \geq q, \\ \left(\frac{p}{q}\right)^x & \text{если } p < q. \end{cases}$$

IV.4.13. Пусть $S_0 = 0$ и η^+ — наибольшее значение блуждания S_n , $n \geq 0$. Доказать, что $P\{\eta^+ = +\infty\} = 1$, если $p \geq q$, а при $p < q$ $P\{\eta^+ = x\} = \left(\frac{p}{q}\right)^x \left(1 - \frac{p}{q}\right)$, $x = 0, 1, \dots$

IV.4.14. Обозначим через

$$P_x(y, z) = P\{\tau_y < \tau_z / S_0 = x\} —$$

вероятность того, что блуждание, выходя из точки x , раньше достигнет точки y , чем точки z . Доказать, что

$$P_x(y, z) = P_{x-y}(0, z-y)$$

и

$$P_x(0, z) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z}, \quad x = 1, 2, \dots, z-1.$$

IV.4.15. Пусть $q \geq p$ и μ_z — число попаданий в точку z за время τ_0

$$\mu_z = \sum_{k=1}^{\tau_0} \sigma_{s_{n-1}}^z \quad (\sigma_j^l — \text{символ Кронекера}).$$

Пусть также

$$P_{xz}^{(n)} = P\{\mu_z = n / S_0 = x\}, \quad n \geq 0, \quad 0 < x < z.$$

Доказать, что

$$P_{xz}^{(n)} = \begin{cases} \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^x - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} & \text{для } n=0, \\ \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} \left(1 - q \left(1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{z-1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} \right) \right)^{n-1} q \left(1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{z-1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} \right) & \text{для } n \geq 1. \end{cases}$$

IV.4.16. Пусть $S_0 = 1$ с вероятностью 1. Доказать, что для случайных величин μ_z , $z \geq 1$, имеет место соотношение

$$P\{\mu_y = n, \mu_z = m\} = P\{\mu'_y = n, \sum_{n=1}^{\mu_y} \mu_{z-y}^{(k)} = m\},$$

$n, m \geq 0, y > z$, где: а) величины $\mu'_y, \mu_{z-y}^{(k)}, k \geq 1$ — независимые в совокупности, б) величина μ'_y распределена, как и величина μ_y , величины $\mu_{z-y}^{(k)}, k \geq 1$, распределены, как и величина μ_{z-y} .

а) Используя эти соотношения, доказать, что производящие функции случайных величин $\mu_z, z \geq 1$, удовлетворяют соотношению

$$Mu^{\mu_z} = \varphi_z(u) = \varphi_y(\varphi_{z-y}(u))$$

и совместная производящая функция случайных величин μ_y и μ_z ($y < z$) удовлетворяет соотношению

$$Mu^{\mu_y} v^{\mu_z} = \varphi_{y,z}(u, v) = \varphi_y(u \varphi_{z-y}(v)).$$

б) Используя задачу IV.4.15, доказать, что производящая функция

$$\varphi_z(u) = \frac{\left(\frac{q}{p}\right) - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} + \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} q \left[1 - \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{z-1}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} \right] u \times$$

$$\times \left[1 - u \left[1 - q \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^{z-1} - \left(\frac{q}{p}\right)^z}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^z} \right] \right]^{-1}.$$

в) Найти моментные функции M_{μ_z} и $M_{\mu_y \mu_z}$, $y \leq z$.
IV.4.17. Обозначим через

$$P_x^{(n)}(0, z) = P\{\tau_0 = n \leq \tau_z / S_0 = x\}, \\ x = 1, 2, \dots, z-1, n \geq 1$$

— вероятность того, что блуждание, выходя из точки x , на n -м шаге попадет в точку 0, не попадая в точку z .

Пусть также $\varphi_x(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_x^{(n)}(0, z) s^n$ — производящая функция последовательности $P_x^{(n)}(0, z)$, $n \geq 0$ (по определению $P_x^{(0)}(0, z) = 0$, $x = \overline{1, z-1}$).

а) Доказать, что функции $\varphi_x(s, z)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\varphi_x(s, z) = sq\varphi_{x-1}(s, z) + sp\varphi_{x+1}(s, z), \quad x = \overline{1, z-1} \quad (a) \\ \varphi_0(s, z) = 1, \quad \varphi_z(s, z) = 0.$$

Показать, что для каждого $|s| \leq 1$ решение этой системы существует и единственно.

б) Доказать, что для того, чтобы функции $\varphi_x(s) = \lambda^x(s)$ удовлетворяли рекуррентному соотношению

$$\varphi_x(s) = gs\varphi_{x-1}(s) + ps\varphi_{x+1}(s), \quad (б)$$

функция $\lambda(s)$ должна удовлетворять квадратному уравнению

$$\lambda(s) = ps\lambda^2(s) + gs. \quad (в)$$

в) Пусть $\lambda_1(s)$, $\lambda_2(s)$ — корни уравнения (в). Показать, что для произвольных функций $u_1(s)$, $u_2(s)$ функции $\varphi_x(s) = u_1(s)\lambda_1^x(s) + u_2(s)\lambda_2^x(s)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению (б).

Используя граничные условия, $\varphi_0(s, z) = 1$, $\varphi_z(1, z) = 0$, найти вид функций $u_1(s)$, $u_2(s)$, при которых $\varphi_x(s, z) \equiv \varphi_x(s)$, $x = \overline{0, z}$ и записать явное выражение для $\varphi_x(s, z)$.

IV.4.18. Обозначим

$$Q_x^{(n)}(y, 0, z) = \mathbf{P} \{S_n = y, n > \tau_0, \tau_z/S_0 = x\}, \\ x = 1, 2, \dots, z-1, n \geq 1; 0 < y < z,$$

— вероятность того, что блуждание, выходя из точки x , на n м шаге попадет в точку y , не попадая в точки 0 и z . Пусть также

$$\psi_x(s, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} Q_x^{(n)}(y, 0, z) s^n$$

— производящая функция последовательности $Q_x^{(n)}(y, 0, z)$, $n = 0, 1, \dots$ (по определению $Q_x^{(0)}(y, 0, z)$ равно 1 для $x = y$ и равно 0 для $x \neq y$). Найти $\psi_x(s, y, z)$.

IV.4.19. Рассмотрим целочисленное блуждание, для которого

$$\xi_k = \begin{cases} +1 & \text{с вероятностью } p, \\ 0 & \text{с вероятностью } q, \\ -1 & \text{с вероятностью } r, \end{cases}$$

где $p, q > 0, r \geq 0, p + q + r = 1$.

Перенести на эту схему утверждения, сформулированные в задачах IV.4.9—IV.4.18 для блуждания Бернулли.

IV.4.20. Пусть \mathfrak{M}_n — минимальная σ -алгебра событий, относительно которой измеримы все случайные величины S_0, S_1, \dots, S_n . Случайная величина τ_1 , принимающая значения $0, 1, 2, \dots, +\infty$ и такая, что для каждого n событие $\{\tau > n\} \in \mathfrak{M}_n$ является марковским моментом для случайного блуждания $S_n, n = 0, 1, \dots$. Доказать, что для любого марковского момента времени удовлетворяются соотношения

$$\mathbf{P} \{S_{\tau+k} \in A_k, k = \overline{1, r/\tau} < \infty, S_\tau = x, \\ S_1 \in B_1, \dots, S_{\tau-1} \in B_{\tau-1}\} = \mathbf{P} \{S_{\tau+k} \in A_k, \\ k = \overline{1, r/\tau} < \infty, S_\tau = x\} = \mathbf{P} \{S_k + x \in A_k, k = \overline{1, r}\}.$$

Замечание. В задачах IV.4.20—IV.4.45 S_n — произвольное случайное блуждание с функцией распределения скачка $F(x)$, удовлетворяющей условию $F(0), 1 - F(0+0) > 0$ (возможны как отрицательные, так и положительные скачки).

IV.4.21. а) Определим случайную величину $\bar{\tau}^+ = \min \times (n : n \geq 1, S_n \geq 0)$ — момент первого попадания блуждания во множество $[0, \infty)$. Величину $\bar{\tau}^+$ называют мо-

ментом первой слабой ступенчатой высоты, а величину $\bar{\gamma}^+ = S_{\tau^+}$ — первой слабой ступенчатой высотой. Пусть $u = P\{\bar{\tau}^+ < \infty, \bar{\gamma}^+ = 0\}$. Доказать, что вероятность $u \in [0, 1)$ и $u = \sum_{n=1}^{\infty} P\{S_1 < 0, \dots, S_{n-1} < 0, S_n = 0\}$.

б) Обозначим теперь величину $\tau^+ = \min(n : n \geq 1, S_n > 0)$ — момент первого попадания блуждания во множество $(0, \infty)$. Величину τ^+ называют моментом первой точной ступенчатой высоты, а величину $\gamma^+ = S_{\tau^+}$ — точной ступенчатой высотой. Доказать, что

$$P\{\tau^+ = +\infty\} = P\{\bar{\tau}^+ < +\infty\} + uP\{\bar{\tau}^+ = +\infty\} + \dots = \\ = \frac{1}{1-u} P\{\bar{\tau}^+ = +\infty\}.$$

IV.4.22. Доказать, что в том случае, когда распределение скачка блуждания $F(x)$ непрерывное, то случайные величины $\bar{\tau}^+$ и τ^+ совпадают с вероятностью 1.

IV.4.23. Обозначим последовательно моменты

$$\bar{\tau}_0^+ = 0, \bar{\tau}_k^+ = \min(n : n > \bar{\tau}_{k-1}^+, S_n \geq S_{\bar{\tau}_{k-1}^+}), k \geq 1, \\ \tau_0^+ = 0, \tau_k^+ = \min(n : n > \tau_{k-1}^+, S_n^- > S_{\tau_{k-1}^+}^-), k \geq 1,$$

Величину $\bar{\tau}_k^+$ называют моментом k -й слабой ступенчатой высоты, а величину τ_k^+ — моментом k -й точной ступенчатой высоты. Доказать, что

$$P\{\tau_k^+ < +\infty\} = (1 - P\{\tau^+ = +\infty\})^k, k \geq 1, \\ P\{\bar{\tau}_k^+ < +\infty\} = (1 - P\{\bar{\tau}^+ = +\infty\})^k, k \geq 1.$$

IV.4.24. Доказать, что величины $\bar{\tau}_k^+, k \geq 1$, и $\tau_k^+, k \geq 1$, являются марковскими моментами времени для блуждания $S_n, n \geq 0$, и проверить, что величины $\bar{\kappa}_k^+ = \bar{\tau}_k^+ - \bar{\tau}_{k-1}^+, k \geq 1$, так же, как и величины $\kappa_k^+ = \tau_k^+ - \tau_{k-1}^+$, образуют последовательность независимых одинаково распределенных величин (здесь $\bar{\tau}_0^+, \tau_0^+$ равны нулю и величины $\bar{\kappa}_k^+ (\kappa_k^+)$ определены в общем случае только на тех элементарных исходах ω , для которых $\bar{\tau}_k^+(\omega) < \infty, (\tau_k^+(\omega) < \infty)$).

IV.4.25. Пусть $\bar{v}^+ = \max(n : \bar{\tau}_n^+ < \infty)$ и $v^+ = \max(n : \tau_n^+ < \infty)$ — общее число соответственно слабых и точных ступенчатых высот блуждания S_n , $n \geq 0$. Доказать, что величины \bar{v}^+ и v^+ — конечны с вероятностью 1 или являются несобственными (величину v называют несобственной, если $P\{|v| = +\infty\} > 0$) одновременно и $P\{\bar{v}^+ \geq n\} = P\{\bar{\tau}_n^+ < \infty\} = (1 - P\{\bar{\tau}^+ = +\infty\})^n$, $n \geq 1$,

$$P\{v^+ \geq n\} = P\{\tau_n^+ < \infty\} = (1 - P\{\tau^+ = +\infty\})^n, \quad n \geq 1.$$

IV.4.26. Определим величины $\bar{\gamma}_k^+ = S_{\bar{\tau}_k^+}$, $k \geq 0$ и $\gamma_k^+ = S_{\tau_k^+}$, $k \geq 0$, соответственно k -ю слабую и точную ступенчатую высоту (величины $\bar{\gamma}_k^+$ и γ_k^+ в общем случае несобственные и определены на тех самых исходах, что и величины $\bar{\tau}_k^+$ и τ_k^+).

Доказать, что величины

$$\bar{\alpha}_k^+ = \bar{\gamma}_k^+ - \bar{\gamma}_{k-1}^+, \quad k \geq 1, \quad \text{и} \quad \alpha_k^+ = \gamma_k^+ - \gamma_{k-1}^+, \quad k \geq 1,$$

образуют последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин.

IV.4.27. Пусть $\eta^+ = \max_{n \geq 0} S_n$ — максимальное значение блуждания S_n , $n \geq 0$. Если величина η^+ конечна с вероятностью 1, то блуждание называется ограниченным сверху.

Доказать, что блуждание ограничено сверху тогда и только тогда, когда величины $\bar{\tau}^+$ и τ^+ несобственные.

IV.4.28. Доказать, что в том случае, когда блуждание не ограничено сверху, то $P\{\eta^+ = +\infty\} = 1$.

IV.4.29. Со случайными величинами S_0, \dots, S_n связаны случайные величины $S_k^* = S_n - S_{n-k}$, $k = 0, n$. Доказать, что совместные распределения случайных величин S_0, \dots, S_n и S_0^*, \dots, S_n^* совпадают.

IV.4.30. Доказать, что

$$P\{S_n \geq S_0, \dots, S_n \geq S_{n-1}\} = P\{S_1^* \geq 0, \dots, S_n^* \geq 0\}.$$

IV.4.31. Определим «отрицательные» моменты ступенчатых высот:

$$\bar{\tau}^- = \min(n : n \geq 1, S_n \leq 0) \quad \text{и} \quad \tau^- = \min(n : n \geq 1, S_n < 0).$$

Доказать, что $M\bar{\tau}^- < \infty$ тогда и только тогда, когда случайная величина $\bar{\tau}^+$ несобственная и в этом случае

$$M\bar{\tau}^- = (1 - P\{\bar{\tau}^+ = +\infty\})(P\{\bar{\tau}^+ = +\infty\})^{-1}.$$

IV.4.32. Доказать, что в том случае, когда существует $M\xi_1 = a < 0$, то $M\tau^- < \infty$.

Указание. Доказать, что в этом случае блуждание ограничено сверху (воспользоваться задачами IV.4.27, IV.4.28, IV.4.31).

IV.4.33. Пусть $\eta^- = \min_{n \geq 0} S_n$ — минимальное значение случайного блуждания. Доказать, что в том случае, когда существует $M\xi_1 = a > 0$, величина $\eta^- > -\infty$ с вероятностью 1 (блуждание ограничено снизу) и существует $M\bar{\tau}^+ < \infty$, $M\tau^+ < \infty$.

IV.4.34. Пусть τ — случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения, такая, что для каждого n случайное событие $\{\tau > n\}$ не зависит от величины $\xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \dots$. Допустим, что $M|\xi_1| < \infty$ и $M\tau < \infty$. Доказать, что в этом случае $M|S_\tau| < \infty$ и $MS_\tau = M\xi_1 \cdot M\tau$.

IV.4.35. Пусть $\bar{\tau}^+$ — момент первой слабой ступенчатой высоты и $\bar{\gamma}^+$ — первая ступенчатая высота. Допустим, что существует $M\xi_1 = a > 0$.

а) Доказать, что в этом случае существует $M\bar{\gamma}^+$ и $M\bar{\gamma}^+ = M\bar{\tau}^+ \cdot M\xi_1$.

б) Вывести аналогичную формулу для величин τ^+ и γ^+ .

IV.4.36. Доказать, что в том случае, когда $M|\xi_1| < \infty$, $M\xi_1 = 0$ тогда и только тогда, когда $P\{\bar{\tau}^+ = +\infty\} = P\{\bar{\tau}^- = +\infty\} = 0$. При этом $M\bar{\tau}^+ = M\bar{\tau}^- = +\infty$.

IV.4.37. Доказать, что в том случае, когда $M|\xi_1| < \infty$, блуждание неограничено сверху и снизу тогда и только тогда, когда

$$M\xi_1 = 0.$$

IV.4.38. Показать, что блуждание не может быть ограниченным и сверху и снизу, если $P\{\xi_1 = 0\} < 1$.

IV.4.39. Целочисленное блуждание называют рекуррентным, если $P_x = 0$, $x = 0, \pm 1, \dots$, где $P_x = P\{S_n \neq x, n = 1, 2, \dots\}$.

Доказать, что рекуррентное целочисленное блуждание, для которого $P\{\xi_1 = 0\} < 1$, неограничено и сверху и снизу.

IV.4.40. Доказать, что вероятность

$$\mathbf{P}\{S_1 \geq 0, \dots, S_{n-1} \geq 0, S_n \in A\} = \mathbf{P}\{S_n \geq S_1, \dots, S_n \geq S_{n-1}, S_n \in A\}, \quad n \geq 1, A \subseteq [0, \infty).$$

IV.4.41. Пусть γ — положение блуждания в момент первого попадания на положительную полуось. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\gamma < x\} = F(x) + \int_0^\infty \psi(dy) F(x-y), \quad x < 0,$$

где

$$\psi(A) = \sum_{n=k}^\infty \mathbf{P}\{S_n > S_1, \dots, S_n > S_{n-1}, S_n \in A\},$$

$$F(x) = \mathbf{P}\{\xi_1 < x\}.$$

IV.4.42. Пусть левый хвост распределения $F(\cdot)$ — показательный, т. е. $F(x) = qe^{\beta x}$ при $x \leq 0$.

а) Доказать, что $\mathbf{P}\{\gamma_- < x\} = Ce^{\beta x}$, $x \leq 0$.

б) Доказать, что если $M\xi_1 \leq 0$, то $C = 1$.

IV.4.43. Пусть правый хвост распределения $F(x)$ — показательный, т. е. $F(x) = 1 - re^{-\alpha x}$, $x > 0$, и пусть также $M\xi_1 = a \geq 0$. Доказать, что $\psi((0, x]) = \alpha x$, $x > 0$.

IV.4.44. а) Доказать, что в том случае, когда правый хвост распределения $F(\cdot)$ показательный, т. е. $F(x) = 1 - re^{-\alpha x}$, $x > 0$, и $M\xi_1 = a \geq 0$, то распределение величины γ равно:

$$\mathbf{P}\{\gamma < x\} = F(x) + \alpha \int_0^\infty F(x-y) dy, \quad x \leq 0.$$

б) Доказать, что в этом случае

$$\mathbf{P}\{\gamma < 0\} = 1 - \alpha a.$$

IV.4.45. Найти распределение случайной величины γ для случайного блуждания, для которого

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = q\beta^{-k}, \quad k = 0, 1, \dots$$

IV.4.46. а) Определим случайную величину $\tau(x) = \min(n : n \geq 1, S_n = x)$ — момент первого достижения блужданием точки x . Пусть x_1, x_2, \dots — некоторая

последовательность целых чисел. Определим случайные величины

$$\tau^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{для } k = 0, \\ \tau(x_1) & \text{для } k = 1, \\ \min(n : n > \tau^{(k-1)}, S_n = x_k) & \text{для } k > 1. \end{cases}$$

Покажите, что каждая величина $\tau^{(k)}$ является марковским моментом.

б) Определим теперь величины $\chi_k = \tau^{(k)} - \tau^{(k-1)}$, $k \geq 1$. Доказать, что случайные величины χ_n , $n \geq 1$, независимы (величина χ_k в общем случае несобственная и определена только на тех элементарных исходах ω , для которых $\tau^{(n)}(\omega) < \infty$), т. е.

$$\mathbf{P}\{\chi_1 = n_1, \dots, \chi_k = n_k\} = \mathbf{P}\{\chi_1 = n_1\} \mathbf{P}\{\chi_2 = n_2 / \tau^{(1)} < \infty\} \dots \mathbf{P}\{\chi_k = n_k / \tau^{(k-1)} < \infty\}.$$

Замечание. В задачах IV.4.46—IV.4.65 рассматривается целочисленное случайное блуждание.

IV.4.47. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\chi_k = n / \tau^{(k-1)} < \infty\} = \mathbf{P}\{\tau(\chi_k - \chi_{k-1}) = n\}, \quad k \geq 1.$$

IV.4.48. Доказать, что совместные распределения двух наборов величин $S_k, k = \overline{0, n}$ и $S_k^* = S_n - \xi_1 - \dots - \xi_{n-k}, k = \overline{0, n}$ (S_0 может быть случайной величиной) совпадают и воспользоваться этим для того, чтобы показать, что

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{S_0 = 0, S_1 \neq 0, x, \dots, S_{n-1} \neq 0, x, \\ S_n = 0\} = \mathbf{P}\{S_0 = x, \\ S_{n-1} \neq 0, x, \dots, S_{n-1} \neq 0, x, S_n = x\}. \end{aligned}$$

IV.4.49. Обозначим

$${}_y f_{zx} = \mathbf{P}\{\tau_{(x)} < \tau_{(y)} / S_0 = z\}.$$

Доказать, что ${}_x f_{00} = {}_0 f_{xx}$.

IV.4.50. Пусть v_{xy} — количество попаданий блуждания в точку y за время $\tau(x)$. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{v_{xy} = n / S_0 = z\} = \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } 1 - {}_x f_{zy}, \\ n & \text{с вероятностью } {}_x f_{zy} \cdot {}_x f_{yy}^{n-1} (1 - \\ & - {}_x f_{yy}), \quad n \geq 1, \end{cases}$$

и доказать также, что в том случае, когда $P\{\tau(0) < \infty / S_0 = 0\} = 1$, вероятность $x f_{yy} < 1$; $x, y = 0, \pm 1, \dots$, и поэтому все моменты величины v_{xy}

$$M(v_{xy}^r / S_0 = z) < \infty, r \geq 1.$$

IV.4.51. Доказать, что в том случае, когда $P\{\tau(0) < \infty / S_0 = 0\} = 1$, среднее число попаданий блуждания в точку y между двумя последовательными попаданиями в точку x равно

$$M(v_{xy} / S_0 = x) = 1.$$

IV.4.52. Пусть $\tau = \min(n : n \geq 1, S_n = 0)$ — момент первого возвращения блуждания в 0. Доказать, что τ — марковский момент времени для блуждания $S_n, n \geq 0$, и вывести формулу

$$P\{\tau = n\} = \sum_{k=1}^n P\{\tau = k\} P\{S_{n-k} = 0\}, n \geq 1.$$

IV.4.53. Блуждание $S_n, n = 0, 1, \dots$, называется *возвратным*, если $P\{\tau < \infty\} = 1$. Доказать, что для того, чтобы блуждание было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{S_n = 0\} = +\infty.$$

IV.4.54. Пусть скачки блуждания ξ_k принимают два значения: $+1$ с вероятностью p и -1 с вероятностью $q = 1 - p$. Доказать, что

$$P\{S_{2n} = 0\} = C_{2n}^n p^n q^n,$$

и, используя формулу Стирлинга, вывести отсюда, что блуждание *возвратно* тогда и только тогда, когда $p = q = \frac{1}{2}$.

IV.4.55. Пусть

$$p_k = P\{\xi_1 = k\}, k = 0, \pm 1, \dots,$$

$$p_n^{(k)} = P\{S_n = k\}, k = 0, \pm 1, \dots,$$

$$\varphi(z) = M e^{iz\xi_1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} p_k e^{izk}.$$

Доказать, что

$$P(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n p_n^{(k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-izk} dz}{1 - \lambda \varphi(z)}.$$

IV.4.56. Доказать, что для того, чтобы случайное блуждание было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 1, \lambda \rightarrow 1} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \lambda \varphi(z)} dz = +\infty.$$

IV.4.57. Доказать, что если блуждание не возвратно, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \varphi(z)} dz < \infty.$$

IV.4.58. Доказать, что если существует $M|\xi_1| < \infty$, $M\xi_1 = 0$, то блуждание возвратно.

IV.4.59. Имеет место такая теорема:

Для того, чтобы блуждание было возвратным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \frac{1}{1 - \varphi(z)} dz = +\infty.$$

Доказать, что в этом случае, если существует $M|\xi_1| < \infty$, и $M\xi_1 \neq 0$, то блуждание не возвратно.

IV.4.60. Доказать, что если величины ξ_k имеют симметричное распределение, то блуждание будет возвратным, если

$$\int_{|z| < \delta} \frac{1}{1 - \varphi(z)} dz = +\infty.$$

IV.4.61. Пусть величины ξ_k имеют симметричные распределения и вероятности $P\{\xi = n\} \sim \frac{c}{n^\alpha}$ при $n \rightarrow \infty$. Доказать, что при $1 < \alpha < 2$ блуждание не возвратно, а при $\alpha > 2$ — возвратно.

IV.4.62. При каких действительных α функция $\varphi_\alpha(s) = 1 - \left| \sin \frac{s}{2} \right|^\alpha$ может быть характеристической функцией

скачка целочисленного случайного блуждания? Доказать, что существует α такое, что соответствующее случайное блуждание S_n с характеристической функцией $\varphi_\alpha(s)$ имеет то свойство, что для каждого целого a блуждание $S_n + an$, $n = 0, 1, \dots$, возвратно.

IV.4.63. Рассмотрим целочисленное случайное блуждание, для которого

$$\xi_1 = \begin{cases} -1 & \text{с вероятностью } q \\ k & \text{с вероятностью } p_k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $q + p_1 + p_2 + \dots = 1$.

Пусть u_r вероятность того, что первый положительный член последовательности S_n , $n \geq 1$, имеет величину r (u_r , $r = 1, 2, \dots$ — распределение первой строго ступенчатой высоты).

а) Доказать, что вероятности u_r удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$u_r = p_r + q(u_{r+1} + u_1 u_r), \quad r \geq 1.$$

б) Пусть $U(s) = \sum_{r=1}^{\infty} s^r u_r$ и $P(s) = \sum_{r=1}^{\infty} s^r p_r$. Доказать, что

$$U(s) = 1 - \frac{P(s) + qs^{-1} - 1}{u_1 q + qs^{-1} - 1}, \quad 0 < s < 1.$$

в) Доказать, что если $M\xi_1 = \mu = P'(1) - q > 0$, то существует единственный корень $0 < \sigma < 1$ уравнения

$$P(s) + qs^{-1} = 1$$

и, воспользовавшись монотонностью функции $U(s)$ и неравенствами $U(s) < 1$, $0 < s < 1$, доказать, что

$$U(s) = s \frac{\sigma}{q} \cdot \frac{P(s) - P(\sigma)}{s - \sigma}.$$

г) Доказать, что если $M\xi_1 < 0$, то $u_1 = \frac{1-q}{q}$.

IV.4.64. Рассмотрим целочисленное случайное блуждание, для которого

$$\xi_1 = \begin{cases} +1 & \text{с вероятностью } p \\ -k & \text{с вероятностью } q_k, \quad k = 0, 1, \dots, \end{cases}$$

где $p + q_0 + q_1 + \dots = 1$.

Пусть $\tau_k = \min(n : S_n = k)$ — момент достижения блужданием точки k .

а) Доказать, что величина τ_k распределена так, как и $\tau^{(1)} + \dots + \tau^{(k)}$, где $\tau^{(l)}$ — независимые случайные величины, одинаково распределенные с величиной τ_1 .

б) Найти распределение величины $\eta^+ = \max_{n \geq 0} S_n$.

в) Пусть $\varphi(s) = M s^{\tau_1} = \sum_{k=1}^{\infty} s^k P\{\tau_1 = k\}$ и $Q(s) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k s^k$. Доказать, что $\varphi(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\varphi(s) = s(p + \varphi(s) Q(\varphi(s))).$$

г) Найти производящую функцию $\varphi(s)$ в случае, когда $q_2 = q_3 = \dots = 0$.

д) Доказать, что $P\{\tau_1 < +\infty\} = 0$, если $\mu = p - \sum_{n=0}^{\infty} k q_k \geq 0$. В противоположном случае $P\{\tau_1 < +\infty\}$ — единственный корень $0 < \varphi < 1$ уравнения

$$\varphi = p + \varphi Q(\varphi).$$

е) Найти вероятность φ для случая, когда $q_k = 0$ при $k \geq 2$.

IV.4.65. Рассмотрим целочисленное случайное блуждание, для которого распределение скачка $p_k = P\{\xi_1 = k\}$, $k = 0, \pm 1, \dots$, удовлетворяет условию $p_k = 0$ для $|k| > 2$.

Пусть u_1 и u_2 — вероятности того, что первый положительный член последовательности S_n , $n \geq 1$, равен соответственно 1 или 2 (u_i , $i = 1, 2$ — распределение строгой ступенчатой высоты). Используя формулу полной вероятности (как гипотезы выбрать возможные результаты первого скачка), составить для вероятностей u_i , $i = 1, 2$ систему уравнений

$$\begin{aligned} u_1 &= p_1 + p_0 u_1 + p_{-1} u_2 + p_{-1} u_1 u_1 + p_{-2} u_2 u_1 + p_{-2} u_1 u_2 + \\ &+ p_{-2} u_1 u_1 u_1, \quad u_2 = p_2 + p_0 u_2 + p_{-1} u_1 u_2 + \\ &+ p_{-2} u_2 u_2 + p_{-2} u_1 u_1 u_2. \end{aligned}$$

§ 5. ЦЕПИ МАРКОВА

Последовательность случайных величин η_n , $n = 0, 1, \dots$, которые принимают значения из конечного или счетного множества $H = \{a_1, a_2, \dots\}$ (если это специально не оговаривается, то будем считать, что $a_i = i$), называют дискретной цепью Маркова, если

$$P\{\eta_{n+1} = j / \eta_n = i, \eta_k = i_k, k = \overline{1, n-1}\} = P\{\eta_{n+1} = j / \eta_n = i\} = p_{ij}(n) \text{ для всех } i, j, i_1, \dots, i_{n-1} \in H \text{ и } n \geq 0.$$

Вероятности $p_{ij}(n)$ называют переходными вероятностями цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, на n -м шаге. Если переход-

ные вероятности $p_{ij}(n) = p_{ij}$, $i, j \in H$, не зависят от n , то говорят, что цепь Маркова η_n , $n \geq 0$ однородна. Соответствующую матрицу $P = \|p_{ij}\|$, $i, j \in H$ называют матрицей переходных вероятностей.

Распределение $p_i = P\{\eta_0 = i\}$, $i \in H$, называют начальным распределением цепи Маркова η_n , $n \geq 0$.

Цепь Маркова η_n , $n \geq 0$, называется конечной или счетной, в зависимости от того, конечно или счетно множество состояний цепи H . Если это специально не оговаривается, то считается, что рассматривается однородная цепь Маркова с множеством состояний $H = \{1, 2, \dots\}$ и матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|$, $i, j \in H$.

IV.5.1. Обозначим через $p_{ij}^{(n)} = P\{\eta_n = j / \eta_0 = i\}$ — переходные вероятности цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, за n шагов. Доказать по индукции, что матрица $P^{(n)} = \|p_{ij}^{(n)}\|$, $i, j \in H$ представляет собой n -ю степень матрицы переходных вероятностей P .

IV.5.2. Доказать, что для каждого целых положительных k и r для всех состояний $i, j \in H$ выполняется равенство

$$p_{ij}^{(k+r)} = \sum_{l \in H} p_{il}^{(k)} p_{lj}^{(r)}.$$

IV.5.3. Матрица переходных вероятностей P является стохастической (все элементы неотрицательны и сумма элементов по каждой строке равна 1). Доказать, что для каждого n матрица $P^{(n)}$ является также стохастической.

IV.5.4. Рассмотрим цепь Маркова с двумя состояниями и матрицей переходных вероятностей $\begin{vmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{vmatrix}$, где $0 < \alpha, \beta < 1$. Найти производящие функции последовательностей $p_{11}^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$, $p_{21}^{(n)}$, $n = 0, 1, \dots$, и точные формулы для вероятностей $p_{ii}^{(n)}$. Найти $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ii}^{(n)} = q_i$.

IV.5.5. Выразить через соответствующие переходные вероятности за k шагов условную вероятность

$$P\{\eta_0 = i / \eta_n = j\}.$$

IV.5.6. Выразить через соответствующие переходные вероятности за k шагов условную вероятность

$$P\{\eta_r = l / \eta_0 = i, \eta_n = j\}.$$

IV.5.7. Пусть r — некоторое положительное целое число. Доказать, что последовательность $\eta_n = \eta_{nr}$, $n \geq 0$, также образует однородную цепь Маркова, и найти матрицу переходных вероятностей этой цепи.

IV.5.8. Рассмотрим цепь Маркова, связанную со схемой испытаний Бернулли с двумя результатами У и Н (вероятность результата У равна p), так: будем считать, что цепь Маркова η_n находится в состоянии 1, если $(n-1)$ -е и n -е испытание привели к результатам УУ. Аналогично, состояния 2, 3 и 4 соответствуют парам результатов УН, НУ, НН. Найти матрицу переходных вероятностей цепи Маркова η_n , $n \geq 0$.

IV.5.9. Пусть ξ_0, ξ_1, \dots — последовательность независимых случайных величин, принимающих значения ± 1 с вероятностями $\frac{1}{2}$. Определим величины $\eta_n = \frac{\xi_n + \xi_{n+1}}{2}$.

Найти вероятности перехода $p_{jk}(m, n) = P\{\eta_n = k / \eta_m = j\}$, где $m < n$, $j, k = -1, 0, 1$. Доказать, что последовательность η_n , $n \geq 0$, не образует цепи Маркова.

IV.5.10. Пусть ξ_0, ξ_1, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения $-1, 1$ соответственно с вероятностями, $1-p$, p и пусть $\eta_n = \xi_n \xi_{n+1}$. Будет ли последовательность η_n , $n \geq 0$, цепью Маркова? Существует ли предел вероятностей $P\{\eta_n = -1\}$ при $n \rightarrow \infty$?

IV.5.11. Величины ξ_0, ξ_1, \dots определены, как и в предыдущей задаче. Пусть $\eta_n = \max_{k=0, n}^k \sum_{i=1}^k \xi_i - \min_{k=0, n}^k \sum_{i=1}^k \xi_i$. Будет ли последовательность η_n , $n \geq 0$, цепью Маркова?

IV.5.12. Вывести из определения цепи Маркова такие соотношения:

$$\begin{aligned} P\{\eta_{n+k} = j_k, k = \overline{1, r/\eta_n = i}, \eta_k = i_k, k = \overline{1, n-1}\} = \\ = P\{\eta_{n+k} = j_k, k = \overline{1, r/\eta_n = i}\} = p_{i j_1} p_{j_1 j_2} \dots p_{j_{r-1} j_r}. \end{aligned}$$

IV.5.13. Через $\mathfrak{M}_{u, v}$ обозначим минимальную σ -алгебру случайных событий, относительно которой измеримы все случайные величины η_n , $n = u, u+1, \dots, v$, где $u \leq v \leq \infty$.

Пусть $A \in \mathfrak{M}_{0,n}$ и $B \in \mathfrak{M}_{n+1,\infty}$. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{B/\eta_n = i, A\} = \mathbf{P}\{B/\eta_n = i\}.$$

IV.5.14. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\eta_k \in A_k, k = \overline{0, n}\} = \sum_{i_k \in A_k, k = \overline{0, n}} p_{i_0} p_{i_1 i_0} \cdots p_{i_{n-1} i_{n-2}}.$$

IV.5.15. Пусть $\eta_n, n \geq 0$, — цепь Маркова с множеством состояний $H = \{1, 2, 3\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$\left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1-\beta & 0 & \beta \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right\|.$$

Определим последовательность $\zeta_n, n \geq 0$, так:

$$\zeta_n = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta_n = 1, 2; \\ 2, & \text{если } \eta_n = 3. \end{cases}$$

При каком условии последовательность $\zeta_n, n \geq 0$ также является цепью Маркова?

IV.5.16. Пусть $\eta_n, n \geq 0$, — однородная цепь Маркова с множеством состояний $H = \{1, 2, \dots\}$ и матрицей переходных вероятностей $\|p_{ij}\|, j \in H$. Пусть также A_1, \dots, A_k — подмножества состояний, которые не пересекаются и такие, что $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m = H$. Определим последовательность $\zeta_n, n \geq 0$, так:

$$\zeta_n = i, \text{ если } \eta_n \in A_i, i = \overline{1, m}.$$

Доказать, что если переходные вероятности цепи Маркова $\eta_n, n \geq 0$, удовлетворяют условиям $p_{ij} = Q_{rl}$, при $i \in A_r, j \in A_l$ для всех $r, l = \overline{1, m}$, то последовательность $\zeta_n, n \geq 0$, также является цепью Маркова с множеством состояний $H' = \{1, 2, \dots, m\}$ и матрицей переходных вероятностей $\|Q_{rl}\|_{r,l=1}^m$.

IV.5.17. Случайную величину τ , принимающую значения $0, 1, \dots + \infty$, называют марковским моментом для цепи Маркова $\eta_n, n \geq 0$, если для каждого $n \geq 0$ событие $\{\tau > n\} \in \mathfrak{M}_{0,n}$.

Доказать, что для любого марковского момента

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \eta_{r+k} = j_k, k = \overline{1, r/\eta_r = i}, \tau < \infty, \eta_k = i_k, k = \overline{1, \tau-1} \} = \\ = \mathbf{P} \{ \eta_k = j_k, k = \overline{1, r/\eta_0 = i} \} = p_{ii_1} \dots p_{i_{r-1}i_r}. \end{aligned}$$

IV.5.18. Доказать, что $p_{ij}^{(n)} > 0$ тогда и только тогда, когда существует цепь состояний $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$, для которых

$$p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{n-1} i_n} > 0.$$

IV.5.19. Говорят, что состояние j достигается из состояния i ($i \rightarrow j$), если существует такое n , что $p_{ij}^{(n)} > 0$. Доказать, что из соотношений $i \rightarrow j$ и $j \rightarrow k$ вытекает, что и $i \rightarrow k$.

IV.5.20. Пусть множество состояний $H = \{1, 2, \dots, m\}$ цепи Маркова $\eta_n, n \geq 0$, — конечно. Доказать, что в том случае, когда $i \rightarrow j$, необходимо существует $n \leq m$ такое, что $p_{ij}^{(n)} > 0$.

IV.5.21. Рассмотрим случайную величину $\tau_j = \min(n : n \geq 1, \eta_n = j)$ — момент достижения цепью Маркова $\eta_n, n \geq 0$, состояния j . Доказать, что τ_j — марковский момент времени.

IV.5.22. Обозначим $f_{ij}^{(n)} = \mathbf{P} \{ \tau_j = n/\eta_0 = i \}, n \geq 1$. Вывести формулу

$$p_{ij}^{(n)} = \delta_i^j + \sum_{k=0}^n f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}, n = 0, 1, \dots,$$

где $f_{ij}^{(0)} = 0, p_{ij}^{(0)} = \delta_i^j$. Вывести формулу, которая связывает производящие функции последовательностей $p_{ij}^{(n)}, p_{jj}^{(n)}$ и $f_{ij}^{(n)}$.

IV.5.23. Обозначим через

$$f_{jj} = \mathbf{P} \{ \tau_j < \infty/\eta_0 = j \} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}.$$

Состояние j называется возвратным, если $f_{jj} = 1$, и невозвратным в противном случае. Доказать, что состояние j возвратно тогда и только тогда, когда

$$\text{ряд } \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = +\infty.$$

IV.5.24. Состояние i называется *существенным*, если для каждого j такого, что $i \rightarrow j$, необходимо и $j \rightarrow i$. В противном случае, если существует такое j , что $i \rightarrow j$, но $j \nrightarrow i$, состояние i называют *несущественным*. Доказать, что несущественное состояние не может быть возвратным.

IV.5.25. Доказать, что если состояние j несущественно, то вероятность $p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $i \in H$.

IV.5.26. Доказать, что все состояния конечной цепи Маркова не могут быть несущественными.

IV.5.27. Построить пример счетной цепи Маркова, в которой все состояния несущественны.

IV.5.28. Состояния i и j называются *состояниями* *сообщающимися* ($i \leftrightarrow j$), если $i \rightarrow j$ и $j \rightarrow i$. Пусть A — некоторое подмножество состояний, такое, что $i \leftrightarrow j$ для всех $i, j \in A$ и $i \nrightarrow j$, если $i \in A$, но $j \notin A$. Тогда говорят, что A образует *существенный класс состояний*. По определению все состояния из существенного класса существенны.

Пусть i — некоторое существенное состояние. Доказать, что множество A_i тех состояний, которые сообщаются с состоянием i , образует существенный класс.

IV.5.29. Доказать, что множество состояний H конечной цепи Маркова единственным способом может быть разбито на конечное количество существенных классов A_j , $j = \overline{1, r}$ (во всяком случае один из них непустой), и множество A_0 несущественных состояний (это множество может быть пустым).

IV.5.30. По виду матрицы переходных вероятностей сделать классификацию состояний соответствующей цепи Маркова (выделить существенные классы состояний и множество несущественных состояний).

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\| \end{aligned}$$

$$\left\| \begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array} \right\| \quad \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right\|$$

IV.5.31. Доказать, что матрица переходных вероятностей, которые соответствуют переходам внутри некоторого существенного класса состояний, также стохастические.

IV.5.32. Пусть $i \leftrightarrow i$. Наибольший общий делитель d_i тех n , для которых $p_{ii}^{(n)} > 0$, называют периодом состояния i . Доказать, что все состояния, принадлежащие одному существенному классу, имеют одинаковый период.

IV.5.33. Пусть множество состояний H цепи η_n , $n \geq 0$, образует один существенный класс. Период d состояний $i \in H$ называют периодом цепи Маркова η_n , $n \geq 0$. Если $d = 1$, то говорят, что цепь Маркова η_n , $n \geq 0$, — неперiodична. При этом имеет место теорема:

Если d — период цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, то множество состояний H разбивается единственным способом на классы C_1, \dots, C_d , которые не пересекаются, и такие, что $\sum_{i \in C_{n+r}} p_{ij}^{(n)} = 1$, $n = 1, 2, \dots$, если $i \in C_r$, $r = \overline{1, d}$,

где $C_{r+nd} = C_r$, $r = \overline{1, d}$, $n \geq 1$.

Множества C_1, \dots, C_d называют циклическими подклассами множества состояний H .

Пусть $\eta_0 \in C_r$ с вероятностью 1. Доказать, что последовательность $\eta_n = \eta_{nd}$, $n = 0, 1, \dots$, также образует однородную цепь Маркова с множеством состояний C_r и матрицей переходных вероятностей $\|p'_{ij}\| = \|p_{ij}^{(d)}\|$, $i, j \in C_r$, причем период этой цепи равен 1.

IV.5.34. По виду матрицы переходных вероятностей определить период d соответствующей цепи Маркова и выделить соответствующие циклические подклассы. Выписать матрицы переходных вероятностей цепей Маркова η_{nd} , $n = 0, 1, \dots$, для случая, когда начальное состояние принадлежит тому или другому подклассу.

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

IV.5.35. Пусть цепь Маркова $\eta_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \geq 0$, представляет собой целочисленное случайное блуждание.

а) Доказать, что для того, чтобы все состояния цепи Маркова сообщались, необходимо и достаточно, чтобы характеристическая функция скачка $\varphi(z) = M e^{iz\xi_1}$ не принимала значения 1 в интервале $(0, 2\pi)$.

б) Доказать, что для того, чтобы цепь Маркова η_n была непериодической, необходимо и достаточно, чтобы $|\varphi(z)| < 1$ для $z \in (0, 2\pi)$.

в) Докажите, что для того, чтобы цепь Маркова η_n имела период d , необходимо и достаточно, чтобы $|\varphi(z)| < 1$ для $z \in (0, 2\pi/d)$ и $|\varphi(2\pi/d)| = 1$.

IV.5.36. Пусть τ — марковский момент времени и

$$\tilde{\tau} = \min(n : n > \tau, \eta_n \in D).$$

Доказать, что момент $\tilde{\tau}$ также марковский.

IV.5.37. Выберем какую-нибудь последовательность состояний i_1, \dots, i_N, \dots и обозначим моменты $\tau^{(N)} = \min(n : n > \tau^{(N-1)}, \eta_n = i_N)$, $N = 1, 2, \dots$. Показать, что все моменты $\tau^{(N)}$ марковские и доказать справедливость следующей формулы:

$$P\{\tau^{(N)} < \infty / \eta_0 = i_0\} = \prod_{r=1}^N P\{\tau_{i_r} < \infty / \eta_0 = i_{r-1}\}.$$

IV.5.38. Пусть, как и выше, $\tau_j = \min(n : n \geq 1, \eta_n = j)$ — момент достижения цепью Маркова η_n , $n \geq 0$, состояния j . Обозначим через $k f_{ij} = P\{\tau_j < \tau_k / \eta_0 = i\}$ вероятность того, что цепь Маркова η_n , $n \geq 0$, выходя из состояния i , раньше попадет в состояние j , чем в состояние k .

Доказать, что если состояние $i \rightarrow j$, то для каждого состояния $k \neq j$ необходима либо вероятность ${}_kf_{ij} > 0$, либо ${}_if_{kj} > 0$.

IV.5.39. Цепь Маркова η_n , $n \geq 0$, с множеством состояний $1, 2, \dots, N$ имеет матрицу переходных вероятностей:

$$\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q & 0 & p & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q & 0 & p & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & q & 0 & p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & q & p \end{pmatrix}$$

Найти вероятности ${}_1f_{iN} = \mathbf{P}\{\tau_N < \tau_1/\eta_0 = i\}$.

IV.5.40. Пусть $\tau_j^{(N)}$ — момент, когда цепь Маркова η_n , $n \geq 0$, N -й раз попадет в состояние j . Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\tau_i^{(N)} < \tau_j/\eta_0 = k\} = {}_jf_{ii}^{N-1} \cdot {}_jf_{ki}.$$

IV.5.41. Пусть μ_{jk} — число попаданий цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, в состояние $k \neq j$ за время τ_j .

а) Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\mu_{jk} > n/\eta_0 = i\} = {}_jf_{ik} \cdot {}_jf_{kk}^{n-1}.$$

б) Доказать, что, если $k \rightarrow j$, то для всех $i \in H$ и $r \geq 1$ выполняются соотношения

$$\mathbf{M}(\mu_{jk}^r/\eta_0 = i) < \infty.$$

IV.5.42. Доказать, что для конечной цепи Маркова, множество состояний которой есть существенный класс, для случайных величин τ_j , $j \in H$ все моменты

$$\mathbf{M}(\tau_j^r/\eta_0 = i) < \infty, \quad r \geq 1, \quad i \in H.$$

IV.5.43. Пусть множество состояний цепи Маркова η_n есть один существенный класс. Как уже отмечалось в задаче IV.5.23, состояние i называют возвратным, если вероятность ${}_if_i = 1 - f_{ii} = 0$. Доказать, что если состояние i возвратное, то вероятность ${}_jf_i = \mathbf{P}\{\tau_j = +\infty/\eta_0 = i\} = 0$ для всех $j \in H$.

IV.5.44. Пусть множество состояний цепи Маркова η_n есть один существенный класс. Доказать, что если состояние i возвратное, то для любого другого состояния j вероятность ${}_if_j = 0$.

IV.5.45. Пусть множество состояний цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, есть один существенный класс. Доказать, что все состояния цепи Маркова η_n , $n \geq 0$ одновременно возвратны или невозвратны (в первом случае цепь Маркова η_n , $n \geq 0$, называют *возвратной*, а во втором — *невозвратной*).

IV.5.46. Обозначим через $\mu_j = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{jk}^j$ общее число падений цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, в состояние j . Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\mu_j \geq n/\eta_0 = i\} = (1 - f_{ji}) f_{ji}^{n-1}, \quad n \geq 1,$$

и вывести отсюда, что для возвратной цепи $\mathbf{P}\{\mu_j = +\infty\} = 1$, а для невозвратной цепи $\mathbf{P}\{\mu_j = +\infty\} = 0$.

IV.5.47. Пусть p_n , $n = 0, 1, \dots$, — некоторое распределение. *Наибольшее целое число d , такое, что все $p_n = 0$, исключая, может быть, p_0, p_d, p_{2d}, \dots , называют шагом распределения p_n , $n \geq 0$.*

Доказать, что если возвратная цепь Маркова η_n , $n \geq 0$, имеет период d , то шаг распределения $f_{jj}^{(n)} = \mathbf{P}\{\tau_j = n/\eta_0 = j\}$, $n \geq 0$, равен d .

IV.5.48. Обозначим для $k \in D$

$${}_D p_{ik}^{(n)} = \mathbf{P}\{\eta_n = k, \tau_D > k/\eta_0 = i\}.$$

Показать, что вероятности ${}_D p_{ik}^{(n)}$ удовлетворяют системе рекуррентных соотношений

$${}_D p_{ik}^{(n)} = \sum_{j \in \bar{D}} p_{ij} {}_D p_{jk}^{(n-1)}, \quad n \geq 1,$$

где

$${}_D p_{ik}^{(0)} = \delta(i, k).$$

IV.5.49. Обозначим $\tau(D) = \min\{n = n \geq 1, \eta_n \in D\}$ — момент первого достижения цепью Маркова η_n области D и пусть

$$f_i(R, D) = \mathbf{P}\{\tau(D) < \infty, \eta_{\tau_D} \in R/\eta_0 = i\}, \quad R \subseteq D, \quad i \in H.$$

а) Показать, что вероятности $f_i(R, D)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$f_i(R, D) = f_i(R) + \sum_{j \in \bar{D}} p_{ij} f_j(R, D), \quad i \in H, \quad (\text{a})$$

где $f_i(R) = \sum_{j \in R} p_{ij}$.

б) Показать, что

$$f_i(R, D) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \bar{D}} {}_D p_{ik}^{(n)} f_k(R). \quad (6)$$

в) Вывести из (а) и (б), что вероятности $f_i(R, D)$, $i \in H$, — представляют собой в классе \mathfrak{L} неотрицательных равномерно по i ограниченных решений системы (а) минимальное решение (для любого другого решения x_i из этого класса $x_i \geq f_i(R, D)$, $i \in H$).

г) Доказать, что $f_i(R, D)$, $i \in H$ представляет собой единственное в классе \mathfrak{L} решение системы (а) тогда и только тогда, когда вероятности

$${}_D f_i = \mathbf{P}\{\tau(D) = +\infty / \eta_0 = i\} \equiv 0, \quad i \in H.$$

IV.5.50. Обозначим

$$\varphi_i(z) = \mathbf{M}\{z^{\tau(D)} / \eta_0 = i\}, \quad i \in H, \quad |z| \leq 1.$$

а) Доказать, что производящие функции $\varphi_i(z)$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\varphi_i(z) = z \left(p_i(D) + \sum_{j \in \bar{D}} p_{ij} \varphi_j(z) \right), \quad (a)$$

где $p_i(D) = \sum_{k \in D} p_{ik}$.

б) Показать, что

$$\varphi_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k \in \bar{D}} z^{n+1} {}_D p_{ik}^{(n)} p_i(D).$$

в) Показать, что для $|z| < 1$ $\varphi_i(z)$, $i \in H$, представляет собой единственное равномерно по i ограниченное решение системы (а).

IV.5.51. Обозначим $m_i(D) = \mathbf{M}\{\tau(D) / \eta_0 = i\}$.

а) Показать, что среднее $m_i(D)$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$m_i(D) = 1 + \sum_{j \in \bar{D}} p_{ij} m_j(D), \quad i \in H, \quad (a)$$

решение которой ищется в классе \mathfrak{N} наборов неотрицательных чисел x_j (причем допускается, чтобы $x_j = +\infty$, но в этом случае считается, что $x_j p_{ij} = 0$, если $p_{ij} = 0$).

б) Показать, что

$$m_i(D) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j \in \bar{D}} p_{ij}^{(n)}. \quad (6)$$

в) Используя (а) и (б), покажите, что в классе \mathfrak{M} $m_i(D)$, $i \in H$, представляет собой минимальное решение системы (а) (для любого другого решения x_i системы (а) из класса \mathfrak{M} $x_i \geq m_i(D)$ для всех $i \in H$).

IV.5.52. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид (цепь Маркова η_n , $n = 0$, имеет множество состояний $H = \{0, 1, \dots, N\}$)

$$\begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & 0 & p_2 & 0 & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots \\ & & & q_{N-2} & 0 & p_{N-2} & 0 \\ & & & 0 & q_{N-1} & 0 & p_{N-1} \\ & & & 0 & 0 & q_N & p_N \end{pmatrix},$$

где $1 > p_i$, $q_i > 0$, $q_i + p_i = 1$, $i = \overline{0, N}$.

а) Пусть область $D = \{0, N\}$. Найти вероятности $f_i(\{N\}, D)$ того, что цепь Маркова раньше достигнет состояния N , чем состояния 0.

б) Пусть область $D = \{N\}$. Найти средние $m_i(D)$.

в) Упростите полученные выражения для случая, когда $p_i = p = 1 - q$, $i = \overline{0, N}$ не зависит от i . Найти в этом случае производящие функции $\phi_i(z)$ для области D , указанной в пункте б).

IV.5.53. Обозначим

$$m_i^{(k)}(D) = M\{\tau^k(D)/\eta_0 = i\}, \quad i \in H.$$

Показать, что средние $m_i^{(k)}(D)$, $i \in H$, удовлетворяют системе линейных уравнений

$$m_i^{(k)}(D) = 1 + \sum_{j \in \bar{D}} \sum_{r=1}^{k-1} C_{kj}^r m_j^r + \sum_{j \in \bar{D}} p_{ij} m_j^{(k)}(D), \quad i \in H.$$

IV.5.54. Пусть η_n , $n \geq 0$, — возвратная цепь Маркова и $\tau_i^{(n)} = \min(n : k > \tau_i^{(n-1)}, \eta_k = i)$, $n \geq 1$, ($\tau_i^{(0)} = 0$) — моменты последовательных попаданий цепи Маркова η_n ,

$n \geq 0$, в состояние i . Доказать, что случайные величины $\kappa_i^{(n)} = \tau_i^{(n+1)} - \tau_i^{(n)}$, $n \geq 0$, конечные с вероятностью 1, независимы и для $n \geq 1$ одинаково распределены, причем

$$\mathbf{P}\{\kappa_i^{(1)} = k\} = f_{ii}^{(k)} = \mathbf{P}\{\tau_i = k/\eta_0 = k\}.$$

IV.5.55. Доказать, что если $m_{ii} = \mathbf{M}(\tau_i/\eta_0 = i) < \infty$, то при любом начальном распределении цепи Маркова η_n случайные величины

$$\frac{1}{n} \tau_i^{(n)} \xrightarrow{\text{п. н.}} m_{ii} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

IV.5.56. Рассмотрим случайные величины

$$\delta_i(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } \eta_n = i, \\ 0, & \text{если } \eta_n \neq i, \end{cases}$$

и пусть $v_i(n) = \sum_{k=1}^n \delta_i(k)$ — число попаданий цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, в состояние i за n переходов.

а) Доказать, что если $m_{ii} < \infty$, то при любом начальном распределении

$$\frac{v_i(n)}{n} \xrightarrow{\text{п. н.}} \frac{1}{m_{ii}} \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

а если $m_{ii} = +\infty$, то

$$\frac{v_i(n)}{n} \xrightarrow{\text{п. н.}} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

IV.5.57. Пусть $\mathbf{P}\{\eta_0 = i\} = 1$ и

$$\mu_{ij}^{(n)} = \sum_{n=\tau_i^{(n)}+1}^{\tau_i^{(n+1)}} \delta_j(k) —$$

число попаданий цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, в состояние j между n -м и $(n+1)$ -м попаданием в состояние i . Доказать, что случайные величины $\mu_{ij}^{(n)}$, $n \geq 0$, независимы и для $n \geq 1$ одинаково распределены

$$\mathbf{P}\{\mu_{ij}^{(1)} = k\} = \mathbf{P}\{\mu_{ij} = k/\eta_0 = i\}, \quad k \geq 0,$$

где μ_{ij} — число попаданий цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, в состояние j за время τ_i (эти величины были введены в задаче IV.5.21).

IV.5.58. Доказать, что если $m_{ii} < \infty$, то при любом начальном распределении

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{v_i(n)} \mu_{ij}^{(k-1)} \xrightarrow{п. н.} M \mu_{ij} \frac{1}{m_{ii}} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

IV.5.59. Используя предыдущую задачу, доказать, что если $m_{ii} < \infty$, то

$$M \mu_{ij} = \frac{m_{ii}}{m_{jj}}.$$

IV.5.60. Обозначим

$$m_{ij} = M \{ \tau_j / \eta_0 = i \}.$$

Пусть цепь Маркова η_n — возвратна.

а) Показать, что если $m_{ii} < \infty$, то $m_{ki} < \infty$ для всех $k \neq i$.

б) Показать, что $m_{ii} < \infty$ или $m_{ii} = +\infty$ одновременно для всех $i \in H$.

в) Показать, что если $m_{ii} < \infty$, то $\sum_{j \in H} q_j = 1$, где $q_j = m_{jj}^{-1}$.

IV.5.61. Цепь Маркова η_n называется эргодической, если для любых $i, j \in H$ существуют

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_{ij}^{(1)} + \dots + p_{ij}^{(n)}}{n} \equiv q_j \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

причем пределы $q_j > 0$ и $\sum_{j \in H} q_j = 1$ (q_j — называется стационарным распределением цепи Маркова η_n).

Используя задачи IV.5.56 и IV.5.60, показать, что условие $m_{ii} < \infty$ (которое в силу IV.5.60, б) если выполняется, то одновременно для всех $i \in H$) является необходимым и достаточным для эргодичности цепи Маркова η_n . При этом ее стационарные вероятности

$$q_j = \frac{1}{m_{jj}}, \quad j \in H.$$

IV.5.62. Показать, что соотношение для вероятностей $p_{ij}^{(n)}$, приведенное в задаче IV.5.22, при $i = j$ является вариантом уравнений восстановления (см. вводные замечания к § 2, гл. IV) и, воспользовавшись сформулированной в § 2, гл. IV, теоремой восстановления (для арифметического случая), показать, что:

а) если цепь Маркова η_n возвратна и непериодична, что

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow q_j \text{ при } n \rightarrow \infty;$$

б) если цепь Маркова η_n — возвратна и имеет период $d > 1$, то $p_{ij}^{(nd)} \rightarrow dq_j$, $n \rightarrow \infty$;

в) для возвратной непериодичной цепи Маркова для всех $i \in H$

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow q_j, \quad n \rightarrow \infty, \quad j \in H,$$

а для возвратной цепи с периодом $d > 1$ для состояний $i \in C_k$ и $j \in C_{k+r}$ (здесь C_1, \dots, C_d , $C_{d+1} = C_1$, $C_{d+2} = C_2$, \dots — соответствующие циклические подклассы)

$$p_{ij}^{(nd+r)} \rightarrow d/m_{ij}, \quad n \rightarrow \infty.$$

г) Показать, что если состояние j цепи Маркова η_n не-возвратно, то

$$p_{ij}^{(n)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \text{ для всех } i \in H,$$

и, следовательно, невозвратная цепь Маркова не может быть эргодической.

IV.5.63. Используя задачу IV.5.59, показать, что стационарные вероятности эргодической цепи Маркова удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} q_j = \sum_{i \in H} q_i p_{ij}, & j \in H, \\ \sum_{i \in H} q_i = 1. \end{cases}$$

IV.5.64. Показать, что если цепь Маркова η_n эргодическая, то система линейных уравнений, приведенная в задаче IV.5.63, имеет единственное неотрицательное решение.

Замечание. Единственность неотрицательного решения этой системы является и необходимым условием эргодичности возвратной цепи Маркова.

IV.5.65. Показать, что цепь Маркова с конечным множеством состояний является эргодической тогда и только тогда, когда все ее состояния сообщаются.

IV.5.66. Цепь Маркова с множеством состояний $H = \{1, 2, \dots, N\}$ имеет матрицу переходных вероятностей

$$\begin{vmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & q & 0 & p & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & q & 0 & p \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & q & p \end{vmatrix}$$

Найти стационарное распределение q_j , $j = \overline{1, N}$.

IV.5.67. Пусть матрица переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|_{i,j=1}^m$, соответствующая конечной непериодической цепи Маркова с одним существенным классом состояний, удовлетворяет условиям $\sum_{i=1}^m p_{ij} = 1$, $j = \overline{1, m}$.

Доказать, что соответствующие стационарные вероятности $q_j = \frac{1}{m}$, $j = \overline{1, m}$.

IV.5.68. Пусть ξ_0, ξ_1, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных по биномиальному закону случайных величин

$$P\{\xi_n = k\} = C_m^k p^k (1-p)^{m-k}, \quad k = \overline{0, m}.$$

Последовательность случайных величин η_n , $n \geq 0$, строится по рекуррентному закону

$$\eta_n = \begin{cases} \eta_{n-1} - k + \xi_{n-1}, & \text{если } \eta_{n-1} \geq k, \\ \eta_{n-1} + \xi_{n-1}, & \text{если } \eta_{n-1} < k, \end{cases}$$

где k — фиксированное положительное целое число. Доказать, что последовательность η_n , $n \geq 0$, образует цепь Маркова, причем при $k < mp$ эта цепь эргодическая.

IV.5.69. Каждая из двух урн содержит N белых и N черных шаров. Число черных шаров в первой урне определяет состояние соответствующей цепи Маркова. На каждом шаге наугад вынимают по одному шару из каждой урны и меняют эти шары местами. Найти переходные вероятности p_{ik} и стационарные вероятности и доказать, что вероятность q_k совпадает с вероятностью достать ровно k

черных шаров, если N шаров брали наугад из совокупности, которая содержит N черных и N белых шаров.

IV.5.70. Цепь Маркова со множеством состояний $H = \{0, 1, \dots\}$ имеет вероятности перехода

$$p_{ij} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\min(i, j)} C_i^k (1-q)^k q^{i-k} \frac{\lambda^{j-k}}{(j-k)!}.$$

Доказать, что $p_{ij}^{(n)} \rightarrow e^{-\lambda/q} \frac{(\lambda/q)^j}{j!}$ при $n \rightarrow \infty$.

Примечание. Такая цепь встречается в статистической механике.

IV.5.71. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова имеет вид

$$\begin{pmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

а) Доказать, что при $q > p$ средние $m_{ij} < \infty$, $i \in H$, и используя систему уравнений, приведенную в задаче IV.5.51, найти эти средние.

б) Доказать, что если $q = p = \frac{1}{2}$, то средние $m_{i0} = \infty$ и цепь Маркова возвратна, а если $q < p$, то цепь Маркова η_n , $n \geq 0$, невозвратна. Найти для этого случая вероятность f_i .

в) Найти стационарные вероятности цепи Маркова η_n при $q > p$.

IV.5.72. Пусть η_n , $n \geq 0$, — цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Найти условия возвратности и эргодичности цепи Маркова и стационарное распределение, если оно существует.

IV.5.73. Матрица переходных вероятностей цепи Маркова η_n имеет вид

$$\begin{pmatrix} q_0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & p_1 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & 0 & p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Доказать, что цепь невозвратна тогда и только тогда, когда $\sum_{i=0}^{\infty} q_i = 1$. Найти условия эргодичности цепи Маркова η_n , а также стационарное распределение, если оно существует. Для случая, когда цепь Маркова η_n невозвратна, найти вероятности ${}_0f_i = \mathbf{P}\{\tau_0 = +\infty / \eta_0 = i\}$.

IV.5.74. Рассмотрим цепь Маркова с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \dots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

Используя производящие функции, исследовать условия возвратности и эргодичности этой цепи. Найти производящую функцию стационарного распределения, если оно существует.

IV.5.75. Рассмотрим цепь Маркова с множеством состояний $H = \{0, 1, \dots\}$ и матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} q+r & p & 0 & 0 & 0 & \dots \\ q & r & p & 0 & 0 & \dots \\ 0 & q & r & p & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},$$

где $p > 0$, $q > 0$, $r \geq 0$, $q + r + p = 1$. Доказать, что: а) при $q > p$ цепь эргодична, найти ее стационарное распределение; б) при $q = p$ цепь возвратна, но $m_{i, i-1} = +\infty$; в) при $q < p$ цепь невозвратна, найти вероятности ${}_{i-k}f_i$ и ${}_{i-k}f_i$.

IV.5.76. Доказать, что производящая функция $\varphi(z) = \mathbf{M}(z^{\tau_i-1} / \eta_0 = i)$ для цепи Маркова η_n , $n \geq 0$, с множест-

вом состояний $H = \{0, 1, \dots\}$ и матрицей переходных вероятностей, которая дана в задаче IV.5.75 (для случая $q \geq p$), равна

$$\varphi(z) = \frac{1}{2zp} (1 - rz - \sqrt{(1 - rz)^2 - 4pqz^2}).$$

IV.5.77. Допустим, что функция распределения случайной величины $\kappa_i^{(1)}$ принадлежит области нормального притяжения устойчивого закона с параметром $\alpha < 1$, т. е.

$$\mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{\kappa_i^{(k)}}{n^{1/\alpha}} < x \right\} \rightarrow \mathbf{P} \{ \kappa_\alpha < x \} \text{ при } n \rightarrow \infty, x \geq 0, \quad (a)$$

где κ_α — неотрицательная случайная величина, преобразование Лапласа которой имеет вид

$$\mathbf{M} e^{-sx_\alpha} = e^{-cs^\alpha}, \quad s \geq 0.$$

Доказать, что в этом случае

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\nu_i(n)}{n^\alpha} < x \right\} \rightarrow F_\alpha(x) \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где функция распределения $F_\alpha(x)$ определяется соотношением

$$F_\alpha(x) = \mathbf{P} \left\{ \kappa_\alpha > \frac{1}{x^{1/\alpha}} \right\}, \quad x \geq 0.$$

IV.5.78. Доказать, что для цепи Маркова, данной в задаче IV.5.75 (для случая $q \geq p$), производящая функция

$$\mathbf{M}(z^{\tau_0}/\eta_0 = 0) = z(r + q + p(2pz)^{-1}(1 - rz - \sqrt{(1 - rz)^2 - 4p^2q^2z^2}))$$

и вывести отсюда, что при $p = q = \frac{1-r}{2}$ преобразование Лапласа случайной величины $\tau_i^{(n)} = \kappa_i^{(0)} + \dots + \kappa_i^{(n-1)}$

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \exp \left\{ -\frac{s}{n^2} \sum_{k=1}^n \kappa_i^{(k)} \right\} &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{s}{n^2}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - e^{\frac{2s}{n^2}}} \right)^n \rightarrow \\ &\rightarrow e^{\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{s}} \text{ при } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

что вследствие теоремы непрерывности эквивалентно соотношению (a), данному в предыдущей задаче.

IV.5.79. Пусть $M(\tau_i^2/\eta_0 = i) = m_{ii}^{(2)} < \infty$. Доказать, что в этом случае

$$P \left\{ \frac{v_i(n) - \frac{1}{m_{ii}} n}{\sigma_i \sqrt{n}} < x \right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

где $\sigma_i^2 = m_{ii}^{(2)} - m_{ii}^2$.

IV.5.80. Пусть цепь Маркова η_n , $n \geq 0$, — эргодична и ее стационарное распределение q_j , $j \in H$. Допустим, что начальное распределение $P\{\eta_0 = j\} = p_j$, $j \in H$, совпадает со стационарным: $p_j = q_j$, $j \in H$. Доказать, что в этом случае последовательность η_n , $n \geq 0$, является стационарной в том смысле, что для всех $n \geq 0$

$$P\{\eta_n = i_1, \dots, \eta_{n+k} = i_k\} = q_{i_1} p_{i_1 i_2} \dots p_{i_{k-1} i_k}, \\ i_1, \dots, i_k \in H, \quad k \geq 1.$$

IV.5.81. а) Пусть η_n , $n \geq 0$, — однородная цепь Маркова со множеством состояний $H = \{1, 2, \dots\}$ и матрицей переходных вероятностей $P = \|p_{ij}\|$, $i, j \in H$.

Доказать, что последовательность $\bar{\eta}_n = (\eta_n, \eta_{n+1}, \dots, \eta_{n+k})$, $n \geq 0$, также является однородной цепью Маркова с множеством состояний $H_k = \{(i_0, \dots, i_k) : i_0, \dots, i_k \in H, p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{k-1} i_k} > 0\}$ и переходными вероятностями

$$p_{\bar{i}\bar{j}} = P\{\bar{\eta}_{n+1} = \bar{j} = (j_0, \dots, j_k) / \bar{\eta}_n = \bar{i} = (i_0, \dots, i_k)\} = \\ = \begin{cases} p_{i_k i_{k+1}}, & \text{если } (i_1, \dots, i_k) = (j_0, \dots, j_{k-1}) \\ 0, & \text{если } (i_1, \dots, i_k) \neq (j_0, \dots, j_{k-1}). \end{cases}$$

б) Если цепь Маркова η_n эргодична и ее стационарное распределение q_j , $j \in H$, то и цепь Маркова $\bar{\eta}_n$, $n \geq 0$, также эргодична и ее стационарное распределение

$$\bar{q}_j = q_{j_0} p_{j_0 j_1} \dots p_{j_{k-1} j_k}, \quad \bar{j} = (j_0, \dots, j_k) \in H_k.$$

IV.5.82. Пусть для каждого $\varepsilon \geq 0$, $\eta_n^{(\varepsilon)}$, $n \geq 0$, — цепи Маркова с множеством состояний $H = \{1, 2, \dots\}$ и матрицами переходных вероятностей $\|p_{ij}(\varepsilon)\|$ и пусть

$$p_{ij}(\varepsilon) \rightarrow p_{ij}(0) \text{ при } \varepsilon \rightarrow 0, \quad i, j \in H.$$

а) Показать, что в том случае, когда предельная цепь Маркова $\eta_n^{(0)}$ возвратна, то для любой области D распределения случайных величин $\tau_D^{(\varepsilon)} = \min(n : n \geq 1, \eta_n^{(\varepsilon)} \in D)$ сходится слабо при $\varepsilon \rightarrow 0$.

$$б) f_i^\varepsilon(D, R) = \mathbf{P} \{ \eta_{\tau_D}^\varepsilon \in R, \tau_D^\varepsilon < \infty / \eta_0^\varepsilon = 0 \} \rightarrow f_i^{(0)}(D, R).$$

в) Построить пример, в котором цепи Маркова $\eta_n^{(\varepsilon)}$ эргодичны для всех ε , но стационарные вероятности $q_i^{(\varepsilon)} \nrightarrow q_i^{(0)}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

§ 1. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Характеристическая функция случайной величины. Пусть ξ — случайная величина с функцией распределения $F(x)$. *Характеристической функцией случайной величины ξ называют функцию*

$$\varphi(z) = M e^{iz\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx} dF(x),$$

которая определена для всех действительных z .

Если случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$, то

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} p(x) dx.$$

Каждая характеристическая функция $\varphi(z)$ имеет такие свойства: а) $\varphi(0) = 1$; б) $\varphi(z)$ равномерно непрерывна на $(-\infty, \infty)$; в) $\varphi(z)$ положительно определена, т. е. для любых комплексных c_1, \dots, c_r и любых действительных чисел z_1, \dots, z_r , $r \geq 1$, выполняются соотношения

$$\sum_{k,j=1}^r c_k c_j \varphi(z_k - z_j) \geq 0.$$

Характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению характеристических функций.

Теорема Бохнера—Хинчина. Для того, чтобы функция $\varphi(z)$ была характеристической функцией некоторого распределения, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна, положительно определена и $\varphi(0) = 1$.

Теоремы непрерывности для характеристических функций (теоремы Леви).

Теорема 1. Если последовательность функций распределений $F_1(x), \dots, F_n(x), \dots$ слабо сходится к функции распределения $F(x)$, то последовательность характеристических функций

$$\varphi_n(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF_n(x)$$

сходится поточечно к характеристической функции

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x).$$

Эта сходимость равномерна по z в любом конечном промежутке.

Теорема 2. Пусть последовательность характеристических функций $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \dots, \varphi_n(z), \dots$ сходится поточечно к непрерывной функции $\varphi(z)$. Тогда функция $\varphi(z)$ характеристическая,

т. е. $\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} dF(x)$, где $F(x)$ — некоторая функция распре-

деления, и соответствующая последовательность функций распределения $\{F_n(x)\}$ сходится слабо к функции $F(x)$.

Преобразование Лапласа случайной величины. Если величина ξ неотрицательна ($F(0) = 0$), то часто удобнее использовать вместо характеристической функции случайной величины ее преобразование Лапласа

$$\psi(s) = Me^{-s\xi} = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x).$$

Характеристическая функция случайного вектора. Характеристической функцией случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ называют функцию

$$\varphi(\bar{z}) = Me^{i(\bar{z}, \bar{\xi})} = \int_{R(m)} \dots \int e^{i(\bar{z}, \bar{x})} dF(x_1, \dots, x_m),$$

где $(\bar{z}, \bar{\xi}) = \sum_{k=1}^m z_k \xi_k$, $F(x_1, \dots, x_m)$ — функция распределения вектора $\bar{\xi}$.

V.1.1. Пусть ξ принимает значения 1 и -1 с вероятностями $\frac{1}{2}$ каждое. Вычислить характеристическую функцию ξ .

V.1.2. Доказать, что функция $\varphi(z) = \cos^2 z$ является характеристической функцией, и найти соответствующее распределение вероятностей.

V.1.3. Пусть ξ принимает значения $-1, 0, 1$ с вероятностями $\frac{1}{3}$ каждое. Вычислить характеристическую функцию ξ .

V.1.4. Доказать, что функции $\varphi_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos kz$,

$\varphi_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k z}$, где $a_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$ являются харак-

теристическими и найти соответствующие распределения вероятностей.

V.1.5.

а) Пусть ξ_1, \dots, ξ_n — независимые случайные величины, каждая из которых принимает значение 1 и -1 с вероятностями $\frac{1}{2}$. Вычислить характеристическую функцию случайной величины $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$.

б) Доказать, что при каждом натуральном n функция $\varphi(z) = \cos^n z$ является характеристической.

V.1.6. Вычислить характеристическую функцию для:

а) распределения Пуассона с параметром λ ; б) биномиального распределения с параметрами p и m ; в) геометрического распределения с параметром p .

V.1.7. Пусть ξ — случайная величина, которая имеет равномерное распределение на $[-a, a]$. Вычислить характеристическую функцию ξ .

V.1.8. Пусть ξ — равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[a, b]$. Доказать, что характеристическая функция ξ равна

$$\varphi_{\xi}(z) = \frac{e^{ibz} - e^{iaz}}{i(b-a)z}.$$

V.1.9. Пусть $\varphi(z)$ — характеристическая функция случайной величины, которая имеет нормальное $N(0, 1)$ распределение.

а) Используя дифференцирование и интегрирование по частям, доказать, что $\varphi'(z) = -z\varphi(z)$, а отсюда и $\varphi(z) = e^{-\frac{1}{2}z^2}$.

б) Доказать, что характеристическая функция нормального распределения со средним a и дисперсией σ^2 имеет вид

$$\varphi(z) = e^{iza - \frac{1}{2}z^2\sigma^2}.$$

V.1.10. Случайная величина ξ имеет показательное распределение с параметром λ . Вычислить характеристическую функцию ξ .

V.1.11. а) Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые одинаково распределенные случайные величины с характеристической функцией $\varphi(z)$. Вычислить характеристическую функцию случайной величины $\xi_1 - \xi_2$.

б) Если $\varphi(z)$ характеристическая функция, то $|\varphi(z)|^2$ также является характеристической функцией. Доказать это.

V.1.12. Доказать, что если $\varphi(z)$ характеристическая функция случайной величины ξ , то случайная величина $\eta = a + b\xi$ имеет характеристическую функцию $e^{iaz}\varphi(bz)$.

V.1.13. Пусть случайная величина ξ — неотрицательна. Доказать, что в этом случае ее преобразование Лапласа $Me^{-s\xi} = \psi(s)$ определено для всех комплексных s , для которых $\operatorname{Re} s \geq 0$. В этой области функция $\psi(s)$ непрерывна и ограничена, а для $\operatorname{Re} s > 0$ — аналитическая функция. Характеристическая функция случайной величины ξ равна

$$\varphi(z) = \psi(-iz), \quad z \in R_1.$$

V.1.14. Пусть случайная величина ξ принимает только целые значения и ее производящая функция $h(z) = Mz^\xi$, а характеристическая функция ξ равна $\varphi(z)$. Доказать, что $\varphi(z) = h(e^{iz})$. Доказать также, что вероятность $p_k = P\{\xi = k\}$, $k = 0, \pm 1, \dots$ выражается через $h(z)$ так:

$$p_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} h(z) z^{-k-1} dz = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(z) e^{izk} dz,$$

где C_1 — окружность единичного радиуса с центром в точке $z = 0$.

V.1.15. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две функции распределения с характеристическими функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ соответственно. Доказать, что тогда имеет место формула, которая известна под названием равенства Парсеваля,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itz} \varphi(z) dG(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-t) dF(x).$$

V.1.16. Доказать, что в том случае, когда характеристическая функция $\varphi(z)$ случайной величины ξ абсолютно интегрируема

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(z)| dz < \infty,$$

то случайная величина ξ имеет плотность распределения $p(x)$, причем

$$p(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-izx} \varphi(z) dz.$$

V.1.17. Пусть $\varphi(z)$ — характеристическая функция, соответствующая распределению $F(x)$. Доказать, что

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) \frac{1 - e^{-izh}}{izh} e^{-izx} dz,$$

если только интеграл в правой части абсолютно сходящийся.

V.1.18. Пусть $\varphi(z)$ — характеристическая функция распределения $F(x)$, а y и $y+h$ — точки непрерывности $F(x)$. Доказать, что имеет место следующая формула обращения для $F(x)$:

$$\frac{F(y+h) - F(y)}{h} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) e^{-\frac{1}{2}a^2 z^2} \frac{1 - e^{-izh}}{izh} e^{-izy} dz.$$

V.1.19. Пусть $\varphi(z)$ — характеристическая функция распределения $F(x)$. Доказать, что для точек непрерывности $F(\cdot)$ имеет место равенство

$$F(x) = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^x \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2 a^2} \varphi(z) e^{-izy} dz dy.$$

V.1.20. Доказать, что соответствие между функциями распределения и характеристическими функциями взаимно однозначное.

V.1.21. Доказать, что характеристическая функция случайной величины ξ с функцией распределения $F(x)$ действительная тогда и только тогда, когда распределение $F(x)$ симметрично, т. е.

$$F(-x+0) = 1 - F(x), \quad x \geq 0.$$

V.1.22. а) Случайная величина ξ имеет двусторонне показательное распределение с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, \quad x \in R_1.$$

Доказать, что характеристическая функция ξ равна

$$\varphi(z) = \frac{1}{1+z^2}.$$

б) Случайная величина ξ имеет распределение Коши с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$$

Доказать, что характеристическая функция ξ равна

$$\varphi(z) = e^{-a|z|}.$$

V.1.23. а) Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } |x| > a, \\ \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) & \text{для } |x| \leq a. \end{cases}$$

Доказать, что характеристическая функция ξ равна

$$\varphi(z) = 2 \frac{1 - \cos az}{a^2 z^2}.$$

б) Случайная величина ξ имеет плотность распределения

$$p(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1 - \cos ax}{a^2 x^2}.$$

Доказать, что характеристическая функция ξ равна

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0 & \text{для } |z| > a, \\ 1 - \frac{|z|}{a} & \text{для } |z| \leq a. \end{cases}$$

в) Доказать, что функция $\varphi(z)$ с периодом $2a$ и $\varphi(z) = 1 - \frac{|z|}{a}$ при $|z| \leq a$ есть характеристическая функция.

V.1.24. Пользуясь теоремой Бохнера—Хинчина, доказать, что когда $\varphi(z)$ характеристическая функция, которая равна нулю при $|z| > a$, а функция $g(z)$ имеет период $2a$ и $g(z) = \varphi(z)$ при $|z| \leq a$, то $g(z)$ — характеристическая функция.

V.1.25. Существуют различные характеристические функции $\varphi_1(z)$ и $\varphi_2(z)$ такие, что $\varphi_1^2(z) = \varphi_2^2(z)$. Доказать это.

V.1.26. Доказать, что существуют независимые случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 с различными функциями распре-

деления, такие, что распределения величин $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_2 + \xi_3$ совпадают.

V.1.27. Используя характеристические функции, доказать, что справедливо такое утверждение: если ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие нормальные распределения $N(a_1, \sigma_1^2)$ и $N(a_2, \sigma_2^2)$ соответственно, то случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ имеет нормальное распределение $N(a_1 + a_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

V.1.28. Пусть ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, которые имеют распределение Пуассона с параметрами λ_1 и λ_2 соответственно. Доказать, что случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ имеет распределение Пуассона с параметром $\lambda_1 + \lambda_2$.

V.1.29.

а) Случайная величина ξ имеет гамма-распределение с параметрами (α, β) (см. задачу II.3.117). Доказать, что характеристическая функция ξ равна $\varphi(z) = \left(\frac{\beta}{\beta - iz}\right)^\alpha$.

б) Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют гамма-распределение с параметрами (α_1, β) и (α_2, β) соответственно. Доказать, что случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2$ имеет гамма-распределение с параметрами $(\alpha_1 + \alpha_2, \beta)$.

V.1.30. Вычислить характеристическую функцию случайной величины, которая имеет распределение χ^2 с n степенями свободы (см. задачу II.3.121).

V.1.31. Пусть ξ и η — независимые случайные величины с функциями распределения $F(x)$ и $I(x)$ и характеристическими функциями $\varphi(z)$ и $\gamma(z)$ соответственно. Доказать, что характеристическая функция произведения $\xi\eta$ равна

$$\int_{-\infty}^{\infty} \gamma(zx) dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(zx) dI(x).$$

V.1.32. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $\varphi(z)$, а η — независимая от ξ равномерно распределенная на $[0, 1]$ случайная величина. Вычислить характеристическую функцию $\xi\eta$.

V.1.33. Доказать, что если $\varphi(z)$ характеристическая функция, то функция $\psi(z) = \frac{1}{z} \int_0^z \varphi(u) du$ также является характеристической.

V.1.34. Пусть ξ_1, ξ_2 — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $N(0, 1)$. Вычислить характеристическую функцию случайной величины $\eta = \frac{1}{2}(\xi_1^2 - \xi_2^2)$.

V.1.35. Привести пример зависимых случайных величин ξ и η , для которых характеристическая функция суммы $\xi + \eta$ совпадает с произведением характеристических функций величин ξ и η .

V.1.36. Случайную величину называют решетчатой, если возможные значения ξ можно представить в виде $a_r = a + k(r)h$, где $k(r)$ — целое. Максимальное значение h называют максимальным шагом распределения. Доказать, что если $\varphi(z)$ характеристическая функция случайной величины ξ и при некотором $z \neq 0$ $|\varphi(z)| = 1$, то ξ — решетчатая случайная величина.

V.1.37. Дать теоретико-вероятностную интерпретацию равенству

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{\sin \frac{z}{2}}{\frac{z}{2}} \cos \frac{z}{2}.$$

V.1.38. Дать теоретико-вероятностную интерпретацию равенству

$$\frac{\sin z}{z} = \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{z}{2^k}.$$

V.1.39. Пусть $F(x)$ и $\varphi(z)$ — соответственно функция распределения и характеристическая функция некоторой случайной величины, имеющей второй момент $M_2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF(x) < \infty$.

а) Доказать, что существует $\varphi''(z)$ и $\psi(z) = -\frac{1}{M_2} \varphi''(z)$ — характеристическая функция. Найти соответствующую ей функцию распределения.

б) Доказать, что $(1-t^2) e^{-\frac{t^2}{2}}$ — характеристическая функция. Найти соответствующую ей функцию распределения.

V.1.40. Пусть ξ — случайная величина с характеристической функцией $\varphi(z)$ и

$$m_n = M\xi^n, \quad M_n = M|\xi|^n.$$

Доказать, что если $M_n < \infty$, то существует непрерывная n -я производная $\varphi^{(n)}(z)$ и $m_n = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{in}$.

V.1.41. Доказать, что если существует $M|\xi|^n = M_n < \infty$, то для характеристической функции случайной величины ξ имеет место разложение Тейлора:

$$\varphi(z+t) = \varphi(z) + t\varphi'(z) + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \varphi^{(n-1)}(z) + \Theta \frac{M_n t^n}{n!},$$

где $|\Theta| \leq 1$.

V.1.42. Доказать, что если все моменты $M_n = M|\xi|^n < \infty$ существуют и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{M_n} = \lambda < \infty$, то распределение $F(x)$ однозначно определяется своими моментами и соответствующая характеристическая функция $\varphi(z)$ аналитична в некоторой окрестности нуля.

V.1.43. Доказать, что распределение $F(x)$, сосредоточенное на конечном промежутке ($F(a) = 0$ и $F(b) = 1$, $a < b$), однозначно определяется своими моментами.

V.1.44. Доказать, что если существует $\varphi''(0)$, то соответствующая случайная величина ξ имеет второй момент.

V.1.45. Доказать, что если существует $\varphi^{(2k)}(0)$, то для соответствующей случайной величины ξ существует $M|\xi|^{2k} < \infty$.

V.1.46. Продолжение. Доказать, что из существования $\varphi'(0)$ не вытекает, что $M|\xi| < \infty$.

V.1.47. Пусть $\varphi(z)$ — характеристическая функция случайной величины ξ . Доказать: а) если $M\xi = 0$, то

$$M|\xi| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \operatorname{Re} \varphi(z)}{z^2} dz;$$

б) если существует $D\xi$, то

$$M|\xi| = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\varphi'(z))}{z} dz.$$

V.1.48. Какие из данных ниже функций являются характеристическими: а) $\cos z$; б) $\sin z$; в) $\frac{1}{2}(1 + \cos z)$; г) e^{-z^2} ; д) $\frac{\sin z}{z}$; е) $\frac{1}{1+z^2}$; ж) $\cos z^2$?

V.1.49. Доказать, что функция

$$\varphi(z) = \begin{cases} \sqrt{1-z^2} & \text{при } |z| \leq 1, \\ 0 & \text{при } |z| > 1 \end{cases}$$

не является характеристической.

V.1.50. Доказать, что случайные величины $\xi_n \xrightarrow{P} 0$ при $n \rightarrow \infty$, тогда и только тогда, когда соответствующие характеристические функции $\varphi_n(t) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ для каждого $t \in R_1$.

V.1.51. Пусть $\varphi_n(t)$, $n \geq 0$, — последовательность характеристических функций такая, что $\varphi_n(t) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ для $|t| < \Delta$. Доказать, что в этом случае $\varphi_n(t) \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ для всех $t \in R_1$.

V.1.52. Пусть $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ — характеристические функции и p_i , $i = 1, 2, \dots$ — последовательность неотрицательных чисел такая, что $\sum_i p_i = 1$. Доказать, что функция $\varphi(t) = \sum_i \varphi_i(t) p_i$ есть характеристическая функция некоторой случайной величины.

V.1.53. Доказать, что любая действительная непрерывная четная функция $\omega(z)$, которая равна 1 в 0 и 0 на ∞ , и график которой вогнут на $(0, \infty)$, является характеристической функцией.

V.1.54. Пусть $\varphi_0(t)$ и $\varphi_n(t)$, $n \geq 1$ — характеристические функции, интегрируемые, и $f_0(x)$ и $f_n(x)$ — соответствующие им плотности функций распределения. Доказать, что если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi_n(t) - \varphi_0(t)| dt \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

то равномерно по $x \in R_1$

$$f_n(x) \rightarrow f_0(x) \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

V.1.55. Пусть $f(x)$ четная функция, являющаяся плотностью функции распределения, которой соответствует строго положительная характеристическая функция $\varphi(t)$.

Доказать, что

$$f_a(x) = \frac{f(x)(1 - \cos ax)}{1 - \varphi(a)}$$

есть плотность, имеющая характеристическую функцию

$$\varphi_a(x) = \frac{2\varphi(x) - \varphi(x+a) - \varphi(x-a)}{2(1 - \varphi(a))},$$

и проверить, что $\varphi_a(\cdot) \rightarrow \varphi(\cdot)$ при $a \rightarrow \infty$, но $f_a(\cdot)$ не стремится к $f(\cdot)$.

V.1.56. Доказать, что если $|\varphi(z)| < 1$ для $0 < z < \lambda$ и $|\varphi(\lambda)| = 1$, то существует такое действительное число b , что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(F\left(b + k \frac{\lambda}{2\pi} + 0\right) - F\left(b + k \frac{\lambda}{2\pi}\right) \right) = 1.$$

V.1.57. Доказать, что в условиях задачи IV.1.56 $\varphi(z)$ — периодическая функция с периодом λ .

V.1.58. Доказать, что если $|\varphi(z)| = 1$ для всех $z \in R_1$, то $\varphi(z) = e^{izb}$, где $b = \text{const} \in R_1$.

V.1.59. Доказать, что если функция $\varphi(z)$ есть характеристическая, то и функция $e^{\varphi(z)-1}$ также характеристическая.

V.1.60. Пусть $\varphi(z)$ — действительная характеристическая функция. Доказать, что справедливы следующие неравенства:

$$1 - \varphi(2z) \leq 4(1 - \varphi(z)), \quad 1 + \varphi(2z) \geq 2\varphi^2(z).$$

V.1.61. Пусть $\varphi(z)$ — действительная характеристическая функция. Доказать, что выполняются следующие неравенства:

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \leq \sqrt{2 \operatorname{Re}(1 - \varphi(z_1 - z_2))},$$

$$1 - \varphi(z)^2 \leq 8(1 - \varphi(z)),$$

$$1 - \operatorname{Re} \varphi(2z) \leq 4(1 - \operatorname{Re} \varphi(z)).$$

V.1.62. Пусть $\xi_{p,n}$ — случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами p и n . Доказать, что если $p \rightarrow 0$ так, что $pn \rightarrow \lambda < \infty$, то распределения величин $\xi_{p,n}$ слабо сходятся к распределению случайной величины ξ_λ , распределенной по закону Пуассона с параметром λ .

V.1.63. Пусть ξ_λ — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром $\lambda < \infty$. Доказать, что при $\lambda \rightarrow \infty$ распределение случайной величины $\frac{\xi_\lambda - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$ сходится слабо к распределению случайной величины, которая имеет нормальное $N(0, 1)$ распределение.

V.1.64. Пусть v, ξ_1, ξ_2, \dots — независимые в совокупности случайные величины, причем величина v принимает целые неотрицательные значения, а величины ξ_1, ξ_2, \dots одинаково распределены. Пусть также $h(s)$ — производящая функция v и $\varphi(z)$ — характеристическая функция ξ_1 .

Рассмотрим случайную величину $S_v = \sum_{k=1}^v \xi_k$. Доказать, что характеристическая функция S_v имеет вид

$$\psi(z) = h(\varphi(z)).$$

V.1.65. Пусть $\varphi(z)$ — характеристическая функция. Доказать, что функция

$$\frac{p}{1 - (1-p)\varphi(z)} \quad (p \in (0, 1))$$

также является характеристической.

V.1.66. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $M\xi_1 = a > 0$. Пусть также v_p — независимая от последовательности ξ_1, ξ_2, \dots случайная величина, распределенная по геометрическому закону с параметром $p > 0$. Рас-

смотрим случайную величину $\zeta_p = \sum_{k=1}^{v_p} \xi_k$.

а) Доказать, что при $p \rightarrow 0$ распределение случайной величины $\zeta_p p$ сходится слабо к распределению случайной величины ζ , распределенной по показательному закону с параметром $\frac{1}{a}$.

б) Пусть $M\xi_1 = 0$ и $D\xi_1 = \sigma^2 > 0$. Доказать, что распределение случайной величины $\sqrt{p} \zeta_p$ при $p \rightarrow 0$ сходится слабо к распределению случайной величины ζ с характеристической функцией $\left(1 + \frac{1}{2} z^2 \sigma^2\right)^{-1}$.

V.1.67. Пусть ξ и τ — независимые случайные величины, причем величина ξ имеет нормальное распределение

с параметрами 0 и σ^2 , а случайная величина τ распределена по показательному закону с параметром λ . Найти характеристическую функцию случайной величины $\sqrt{\tau}\xi + a\tau$.

V.1.68. Случайная величина ξ распределена по закону Пуассона, где параметр λ — случайная величина с характеристической функцией $\Phi(t)$. Доказать, что $\Phi\left(\frac{e^{it}-1}{t}\right)$ — характеристическая функция случайной величины ξ .

V.1.69. Пусть ξ — неотрицательная случайная величина и $M\xi^k < \infty$. Доказать, что в этом случае существует $\varphi^{(k)}(s)$ и $(-1)^k \varphi^{(k)}(0) = M\xi^k$, где $\varphi(s) = Me^{-s\xi}$.

V.1.70. Доказать, что $\varphi(s) < 1$ для $s > 0$, если только $P\{\xi > 0\} > 0$. Доказать также, что преобразование Лапласа случайной величины ξ , которая принимает неотрицательные значения и, возможно, значение $+\infty$, стремится к 1 при $s \rightarrow 0$ тогда и только тогда, когда $P\{\xi = +\infty\} = 0$.

V.1.71. Пусть $\varphi(s)$ — преобразование Лапласа функции распределения $F(x)$. Доказать, что $\frac{\varphi(s+h)}{\varphi(h)}$, $h \geq 0$, есть также преобразование Лапласа некоторой функции распределения $G(x)$.

V.1.72. Пусть $F(x)$ и $\varphi(s)$ — соответственно функция распределения и преобразование Лапласа некоторой неотрицательной случайной величины ξ , имеющей конечный n -й момент $\mu_n = M\xi^n < \infty$.

Доказать, что существует $\varphi^{(n)}(s)$ и функция $(-1)^n \times \times \frac{1}{\mu_n} \varphi^{(n)}(s)$ является преобразованием Лапласа некоторой функции распределения $G(x)$. Найти $G(x)$.

V.1.73. Пусть ξ и η — неотрицательные независимые случайные величины, имеющие преобразование Лапласа $\varphi(s)$ и e^{-s^α} соответственно. Доказать, что $\xi^{\frac{1}{\alpha}}\eta$ имеет преобразование Лапласа $\varphi(s^\alpha)$.

V.1.74. Доказать, что характеристическая функция $\varphi(z)$ случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ положительно определена: для любого n , набора $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n \in R_m$ и комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ выполняется неравенство

$$\sum_{k,j=1}^n \varphi(\bar{z}_k - \bar{z}_j) \alpha_k \bar{\alpha}_j \geq 0.$$

V.1.75. Характеристическая функция $\varphi(\bar{z})$ равномерно непрерывна и

$$|\varphi(\bar{z}_1) - \varphi(\bar{z}_2)| \leq \sqrt{2 \operatorname{Re}(1 - \varphi(\bar{z}_1 - \bar{z}_2))}.$$

V.1.76. Доказать, что если функция $g(\bar{z})$ положительно определена, а $\varphi(\bar{z})$ — характеристическая функция некоторого распределения, то функция $g(\bar{z})\varphi(\bar{z})$ также положительно определена.

V.1.77. Если функция $g(\bar{z})$ непрерывна, положительно определена и абсолютно интегрируема на R_m , то функция

$$\rho(\bar{x}) = \int_{R_m} e^{-i(\bar{z}, \bar{x})} g(\bar{z}) dz_1, \dots, dz_m$$

неотрицательна и интегрируема. Доказать, что тогда выполняется такое соотношение:

$$g(\bar{z}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int_{R_m} e^{i(\bar{z}, \bar{x})} \rho(\bar{x}) d\bar{x}.$$

V.1.78. Найти характеристическую функцию двумерного распределения Коши с плотностью

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{(t^2 + x_1^2 + x_2^2)^3}}, \text{ где } t > 0.$$

V.1.79. Случайные величины ξ и η имеют совместную плотность функции распределения

$$\rho(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{4} (1 + xy) (x^2 - y^2) & \text{для } (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \\ 0 & \text{для } (x, y) \notin [-1, 1] \times [-1, 1]. \end{cases}$$

Найти характеристическую функцию случайного вектора (ξ, η) .

V.1.80. Пусть $\varphi(z_1, \dots, z_m)$ — характеристическая функция случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ и $\bar{\eta} = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ — случайный вектор, образованный с помощью линейного преобразования вектора $\bar{\xi}$:

$$\eta_i = \xi_1 a_{i1} + \dots + \xi_m a_{im} + b_i, \quad i = \overline{1, l}.$$

Найти характеристическую функцию вектора $\bar{\eta}$.

V.1.81. Доказать, что характеристические функции $\varphi(z_1, \dots, z_m)$ и $\varphi_{\bar{z}}(\lambda)$ случайного вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$

и случайной величины $\eta_z = z_1 \xi_1 + \dots + z_m \xi_m$ связаны соотношением $\varphi(\lambda z_1, \dots, \lambda z_m) = \varphi_z(\lambda)$.

V.1.82. Плотность функции распределения нормального вектора $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ задана соотношением

$$p(x_1, \dots, x_m) = \sqrt{\frac{\det R^*}{(2\pi)^m}} e^{-\frac{1}{2} Q(x_1, \dots, x_m)}.$$

Здесь $\mu_i = M\xi_i$, $i = \overline{1, m}$; R^* — матрица, обратная к ковариационной матрице

$$R = \|r_{ij}\| = \|M(\xi_i - \mu_i)(\xi_j - \mu_j)\|_{i,j=1}^m$$

и

$$Q(x_1, \dots, x_m) = \sum_{i,j=1}^m r_{ij}^* (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j).$$

Доказать, что характеристическая функция вектора $\bar{\xi}$ есть:

$$\varphi(z_1, \dots, z_m) = \exp \left\{ i \sum_{j=1}^m z_j \mu_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^m r_{ij} z_i z_j \right\}.$$

V.1.83. Пусть ξ_1, ξ_2, ξ_3 — независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение $N(0, 1)$.

Найти совместную характеристическую функцию случайных величин

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 \text{ и } \eta_2 = \xi_1 + \xi_3.$$

V.1.84. Доказать, что если для случайного вектора

$$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \quad M|\xi_{i_1}^{k_1} \dots \xi_{i_l}^{k_l}| < \infty,$$

то для характеристической функции $\varphi(z_1, \dots, z_m)$ вектора $\bar{\xi}$ существует непрерывная производная $\frac{\partial \varphi(z_1, \dots, z_m)}{\partial z_{i_1}^{k_1} \dots \partial z_{i_l}^{k_l}}$

$$i^{k_1} \dots i^{k_l} M \xi_{i_1}^{k_1} \dots \xi_{i_l}^{k_l} = \frac{\partial \varphi(z_1, \dots, z_m)}{\partial z_{i_1}^{k_1} \dots \partial z_{i_l}^{k_l}} \Big|_{z_1=\dots=z_m=0}.$$

V.1.85. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ имеют совместное нормальное распределение, при этом

$$M\xi_i = 0, \quad i = \overline{1, 4} \text{ и } M\xi_i \xi_j = r_{ij}, \quad i, j = \overline{1, 4}.$$

Найти: а) $M\xi_1 \xi_2 \xi_3 \xi_4$; б) $M\xi_1 \xi_2 \xi_3$; в) $M(\xi_1 \xi_2 \xi_3)^2$.

§ 2. ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые случайные величины и $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$. При достаточно общих условиях предельным распределением для подходящим образом центрированных и нормированных сумм $\frac{S_n - A_n}{B_n}$ является нормальное распределение, точнее

$$P \left\{ \frac{S_n - A_n}{B_n} < x \right\} \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2}} du \quad (1)$$

при $n \rightarrow \infty$, $x \in R_1$

Теоремы, которые утверждают нормальность предельного распределения суммы независимых величин S_n , называются центральными предельными теоремами.

Один из основных методов получения утверждений, подобных центральной предельной теореме, есть метод, основывающийся на использовании теоремы непрерывности, по которой соотношения (1) эквивалентны сходимости соответствующих характеристических функций

$$M e^{iz \frac{S_n - A_n}{B_n}} \rightarrow e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, z \in R_1.$$

Важное теоретическое и практическое значение имеют также так называемые локальные предельные теоремы.

Локальные предельные теоремы относятся к величинам с арифметическими распределениями, или величинам, которые имеют плотность распределения. В случае величин с арифметическим распределением в таких теоремах находится асимптотика вероятности того, что сумма независимых величин имеет данное значение. Локальные теоремы для плотности устанавливают условия, при которых плотность распределения суммы сходится к плотности нормального распределения.

V.2.1. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины с $M\xi_1 = a$ и $D\xi_1 = \sigma^2 < \infty$. Доказать, что для суммы S_n выполняется центральная предельная теорема, если выбрать $A_n = an$ и $B_n = \sqrt{n}\sigma$.

V.2.2. Пусть D — область в l -мерном пространстве, которая имеет объем v , и $|f(x)| \leq h$ — функция, определенная всюду в области D . Чтобы вычислить $I = \int_D f(\bar{x}) d\bar{x}$

методом Монте—Карло, бросают в область D наугад независимо одну от другой n точек $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ и берут за при-

ближенную оценку интеграла $I_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k)$.

Чему равно MI_n ? Сделать оценку DI_n и найти предельное распределение $\sqrt{n}(I_n - I)$, если $n \rightarrow \infty$.

V.2.3. Проводится серия независимых испытаний с двумя возможными результатами «У» и «Н», причем вероятность появления результата «У» в одном испытании равна p . Пусть $v_N(p)$ — частота появления результата «У» в N испытаниях. Доказать, что $Mv_N(p) = p$ и $\sup_p Dv_N(p) = \frac{1}{4N}$.

Используя центральную предельную теорему, найти оценку для вероятности того, что $v_N(p)$ будет отличаться от p не больше, чем на ε . Найти N , при котором для $\varepsilon = 0,01$ эта вероятность не превышает: а) 0,1; б) 0,05; в) 0,01.

V.2.4. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность одинаково распределенных симметричных случайных величин. Доказать, что достаточным условием для существования последовательности B_n такой, что последовательность $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$ имеет предельное нормальное распределение, является условие

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 \int_{|x| > t} dF(x)}{\int_{|x| < t} t x^2 dF(x)} = 0,$$

где $F(x) = P\{\xi_k < x\}$.

V.2.5. Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых случайных величин с $M\xi_1 = 0$ и $D\xi_1 = \sigma^2$. Пусть также для каждого n v_n — случайная величина, которая не зависит от последовательности ξ_1, ξ_2, \dots и принимает целые неотрицательные значения, причем

$$P\left\{\frac{v_n}{k_n} \leq x\right\} \rightarrow F(x), \text{ если } n \rightarrow \infty,$$

в точках непрерывности предельной функции распределения $F(x)$, которое удовлетворяет дополнительному условию $F(0) = 0$, здесь $k_n \rightarrow \infty$, если $n \rightarrow \infty$. Доказать, что в этом случае

$$P\left\{\sum_{n=1}^{v_n} \frac{\xi_n}{\sqrt{k_n}} < x\right\} \rightarrow G(x), \text{ если } n \rightarrow \infty, x \in R_1,$$

где $G(x)$ — функция распределения с характеристической функцией

$$\psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{z^2 \sigma^2 x}{2}} dF(x).$$

V.2.6. а) Пусть ξ — случайная величина, для которой существуют $M\xi = a$, $D\xi = b$ и $\varphi(z)$ — ее характеристическая функция. Доказать, что

$$\varphi(z) e^{-iza} = 1 - \frac{bz^2}{2} + z^2 \alpha(z),$$

где

$$\alpha(z) = \frac{1}{z^2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{iz(x-a)} - 1 - iz(x-a) + \frac{z^2(x-a)^2}{2}) dF(x),$$

$$F(x) = P\{\xi < x\}.$$

б) Доказать, что для любых ε , $B > 0$ имеет место оценка

$$\alpha(z) \leq \int_{|x| < \varepsilon B} (x-a)^2 dF(x) + \frac{\varepsilon B |z|}{6} b.$$

в) Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые случайные величины, для которых существует $M\xi_k = a_k$, $D\xi_k = b_k^2$. Доказать, что для того, чтобы для сумм S_n выполнялась центральная предельная теорема при $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ и $B_n = \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > \varepsilon B_n} (x-a_k)^2 dF_k(x) = 0,$$

где $F_k(x) = P\{\xi_k < x\}$.

г) Пусть для некоторого $\delta > 0$ существуют

$$M|\xi_k - a|^{2+\delta} = c_k < \infty, \quad k \geq 1.$$

Доказать, что для того, чтобы для сумм S_n выполнялась

центральная предельная теорема при $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$ и $B_n = (\sum_{k=1}^n b_k^2)^{\frac{1}{2}}$ достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n c_k = 0.$$

Замечание. Сформулированные в пунктах в) и г) утверждения называются соответственно теоремой Линдберга и теоремой Ляпунова.

V.2.7. Пусть ξ_k , $k \geq 1$, — независимые случайные величины, причем

$$\mathbf{P}\{\xi_k = \pm 1\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \text{ и } \mathbf{P}\{\xi_k = \pm \sqrt{k}\} = \frac{1}{4k^2}.$$

Выполняется ли для сумм S_n центральная предельная теорема?

V.2.8. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — независимые случайные величины, причем

$$\mathbf{P}\{\xi_k = \pm 1\} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{k}\right) \text{ и } \mathbf{P}\{\xi_k = \pm \sqrt{k}\} = \frac{1}{2k}.$$

Доказать, что ни при каких нормирующих константах B_n распределение величин $\frac{1}{B_n} S_n$ не стремится к $\Phi(x)$.

V.2.9. Пусть ξ_k , $k \geq 1$, — последовательность независимых случайных величин, причем $\mathbf{P}\{\xi_k = \pm 2^k\} = \frac{1}{2}$. Выполняется ли для сумм S_n центральная предельная теорема?

V.2.10. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, — последовательность независимых случайных величин, причем $\xi_k = \pm x_k$ с вероятностями $\frac{1}{2}$. Какому условию должны удовлетворять x_k , чтобы существовали такие постоянные B_n , чтобы величины $\frac{1}{B_n} S_n$ имели предельное нормальное распределение? Доказать, что в этом случае $\frac{1}{B_n} \max_{1 \leq k \leq n} |x_k| \rightarrow 0$.

V.2.11. На отрезке $[0, 1]$ наугад выбирают число ξ и раскладывают его в десятичную дробь $\xi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(\xi)}{10^n}$. До-

казать, что распределение $S_n = \sum_{k=1}^n e_k(\xi)$ при соответствующем нормировании стремится к нормальному закону.

V.2.12. Пусть $\bar{\xi}_n = (\eta_{n_1}, \dots, \eta_{n_m})$, $n \geq 1$, — последовательность независимых случайных векторов и $S_n = \bar{\xi}_1 + \dots + \bar{\xi}_n$. Доказать, что распределение случайных векторов $\frac{1}{B_n} S_n$ стремится при $n \rightarrow \infty$ к многомерному нормальному закону с характеристической функцией

$$\varphi(\bar{z}) = \exp\left(i(\bar{z}, \bar{a}) - \frac{1}{2}(B\bar{z}, \bar{z})\right)$$

(здесь $\bar{a} = (a_1, \dots, a_m)$ — вектор средних и $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^m$ — ковариационная матрица) тогда и только тогда, когда для любого $\bar{z} = (z_1, \dots, z_m) \in R_m$ функция распределения

сумм случайных величин $S_n(z) = \sum_{k=1}^n \frac{(\bar{\xi}_k, \bar{z})}{B_n}$ при $n \rightarrow \infty$

сходится к одномерному нормальному закону со средним (\bar{a}, \bar{z}) и дисперсией $(B\bar{z}, \bar{z})$.

V.2.13. Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ — последовательность независимых случайных величин, имеющих одинаковые распределения, с $M\xi_1 = 0$, $D\xi_1 = 1$. Доказать, что для любых $0 < t_1 < \dots < t_m$ совместная функция распределения случайных величин

$$\xi_n(t_i) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k \leq t_i n} \xi_k, \quad i = \overline{1, m} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

сходится к многомерному нормальному закону с нулевым средним и ковариационной матрицей

$$B(\bar{t}) = \|\min(t_i, t_j)\|_{i,j=1}^m.$$

V.2.14. Пусть $\xi_{1n}, \dots, \xi_{k_n n}$ — при каждом $n \geq 1$ серия независимых случайных величин, причем число слагаемых в серии $k_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Положим

$$S_n = \xi_{1n} + \dots + \xi_{k_n n}$$

и

$$S_{\varepsilon n} = \xi_{1n}^{(\varepsilon)} + \dots + \xi_{k_n n}^{(\varepsilon)},$$

где

$$\xi_{kn}^{(\varepsilon)} = \begin{cases} 0, & \text{если } |\xi_{kn}| > \varepsilon \\ \xi_{kn}, & \text{если } |\xi_{kn}| \leq \varepsilon \end{cases}$$

а) Показать, что при выполнении условия

$$\sum_{n=1}^{k_n} \mathbf{P} \{ |\xi_{kn}| > \varepsilon \} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \varepsilon > 0$$

можно построить последовательность положительных чисел $\varepsilon_n \downarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ такую, что

$$\sum_{n=1}^{k_n} \mathbf{P} \{ |\xi_{nk}| > \varepsilon_n \} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty. \quad (\text{а})$$

б) Показать, что при выполнении (а)

$$S_n - S_{\varepsilon_n n} \xrightarrow{P} 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

в) Показать, что при выполнении для некоторой последовательности $\varepsilon_n \downarrow 0$ условия (а) для всякого $\varepsilon > 0$

$$MS_{\varepsilon n} - MS_{\varepsilon_n n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$$

и

$$DS_{\varepsilon n} - DS_{\varepsilon_n n} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

V.2.15. Центральная предельная теорема в схеме серий. Показать, что при выполнении для каждого $\varepsilon > 0$ условий

$$\sum_{k=1}^{k_n} \mathbf{P} \{ \xi_{kn} > \varepsilon \} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \quad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} M\xi_{kn}^{(\varepsilon)} \rightarrow a, n \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где $-\infty < a < +\infty$,

$$\sum_{k=1}^{k_n} D\xi_{kn}^{(\varepsilon)} \rightarrow \sigma^2, n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $\sigma^2 \geq 0$, случайные величины

$$\mathbf{P} \{ S_n < x \} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}} du = \Phi_{a, \sigma^2}(x).$$

Замечание. Условия (1) — (3) называются «центральным критерием нормальной сходимости». Можно показать, что эти условия являются также и необходимыми для того, чтобы суммы $S_n \Rightarrow N(0, \sigma^2)$ при $n \rightarrow \infty$ и выполнялось так называемое условие равномерной малости слагаемых

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} P\{|\xi_{kn}| > \varepsilon\} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \text{для всех } \varepsilon > 0.$$

При $\sigma^2 = 0$ условия (1) — (3) дают критерий сходимости к вырожденному закону.

V.2.16. Показать, что если в центральной критерии сходимости отбросить условие (2), то обозначив для некоторого $\varepsilon > 0$

$$a_n = \sum_{k=1}^{k_n} M\xi_{kn}^{(\varepsilon)},$$

получим

$$P\{S_n - a_n < x\} \rightarrow \Phi_{a, \sigma^2}(x).$$

V.2.17. а) Пусть $M\xi_{kn}^2 < \infty$, $k = \overline{1, k_n}$, причем $\sum_{k=1}^{k_n} D\xi_{kn} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| > \varepsilon} (x - M\xi_{kn})^2 dF_{kn}(x) = 0. \quad (a)$$

Здесь $F_{kn}(x)$ — функция распределения ξ_{kn} . Тогда, если

$$a_n = \sum_{k=1}^{k_n} M\xi_{kn}, \quad \text{то}$$

$$P\{S_n - a_n < x\} \rightarrow \Phi_{a, 1}(x).$$

б) Показать, что условие (а) можно заменить на условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{k_n} M|\xi_{kn} - M\xi_{kn}|^{2+\delta} = 0, \quad \text{где } \delta > 0.$$

V.2.18. Если $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nk_n}$ — последовательность серий независимых случайных величин, для которой $\sum_{j=1}^{k_n} \xi_{nj} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ по вероятности, то для любой последовательности l_n натуральных чисел, для которой $l_n \leq k_n$, можно

указать такую последовательность α_n , что $\sum_{j=1}^n \xi_{nj} - \alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ по вероятности. Доказать это.

V.2.19. Если $\xi_{n1}, \dots, \xi_{nk_n}$ — последовательность серий независимых неотрицательных случайных величин, то для выполнения условия $\sum_{j=1}^{k_n} \xi_{nj} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ по вероятности достаточно, чтобы для произвольного $\varepsilon > 0$:

$$\text{а) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \mathbf{P} \{ \xi_{nj} > \varepsilon \} = 0;$$

$$\text{б) } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{k_n} \int_{|x| < \varepsilon} x dF_{nj}(x) = 0.$$

V.2.20. Показать, что условия а) и б), приведенные в предыдущей задаче, являются также и необходимыми для того, чтобы $\sum_{j=1}^{k_n} \xi_{nj} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ по вероятности.

V.2.21. Пусть случайная величина ξ имеет плотность распределения и $\mathbf{M}\xi = 0$, $\mathbf{D}\xi = b^2 < \infty$. Доказать, что в этом случае существует такое $\delta > 0$, что

$$\sup_{|z| > u} |\varphi(z)| \leq e^{-\delta u^2} \text{ для } 0 < u < 1$$

(здесь $\varphi(z)$ — характеристическая функция ξ).

V.2.22. а) Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины с $\mathbf{M}\xi_1 = 0$ и $\mathbf{D}\xi_1 = 1$ и плотностью $p(x)$. Допустим также, что функция $|\varphi(z)|^v$ интегрируема на $(-\infty, +\infty)$, где $\varphi(z)$ — характеристическая функция ξ_1 , $v \geq 1$. Доказать, что тогда

$$p_n(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ при } n \rightarrow \infty \quad (\text{а})$$

(здесь $p_n(x)$ — плотность функции распределения случайной величины $\frac{1}{\sqrt{n}}(\xi_1 + \dots + \xi_n)$).

б) Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с $\mathbf{M}\xi_1 = 0$, $\mathbf{D}\xi_1 = 1$ и ограниченной плотностью. Доказать, что имеет

место соотношение (а). Доказать также, что соотношение (а) имеет место и в том случае, когда допущение о существовании ограниченной плотности для величины ξ заменить на более слабое допущение 1) существует n_0 такое, что величина $\sum_{k=1}^{n_0} \xi_k$ имеет ограниченную плотность; или на допущение 2) $\int_{-\infty}^{\infty} p^2(x) dx < \infty$.

V.2.23. Доказать, что в условиях задачи V.2.22, б) $p_n(x)$ стремится к $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ равномерно на каждом конечном промежутке и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| dx = 0.$$

V.2.24. Доказать, что в том случае, когда в условии задачи V.2.22, б) величина ξ_k имеет момент $M|\xi_k|^{2+\delta} < \infty$, $0 < \delta < 1$, то

$$\left| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| \leq cn^{-\frac{\delta}{2}},$$

где c — некоторая постоянная.

V.2.25. Пусть функция распределения $F(x)$ величины ξ_k имеет вид $F(x) = pF_1(x) + qF_2(x)$, $p, q > 0$, $p + q = 1$, где $F_1(x)$ — функция распределения, имеющая плотность $p(x)$, $F_2(x)$ — произвольная функция распределения. Допустим, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x dF_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF_2(x) = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_1(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 dF_2(x) = 1. \end{aligned}$$

Обозначим: $f_n^{(1)}(x)$ — плотность $F_1^{*n}(x)$, где $F_1^{*n}(\cdot)$ есть n -кратная свертка функции $F_1(\cdot)$ себя с самой, и $f_n(x)$ — плотность абсолютно непрерывной компоненты функции $F^{*n}(\cdot)$.

Доказать, что тогда

$$f_n(x) \geq \sum_{k=1}^n C_n^k \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(1)}(x-y) dF_2^{*(n-k)}(y) p^k q^{n-k}.$$

V.2.26. а) Доказать, что для произвольного $\varepsilon > 0$ в условиях задачи V.2.25

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\left| \frac{k}{n} - 1 \right| > \varepsilon} C_n^k p^k q^{n-k} \int_{-\infty}^{\infty} f_k^{(1)}(x-y) dF_2^{*(n-k)}(y) dx = 0.$$

б) Доказать, что когда в условиях задачи V.2.25 функция $p(x)$ интегрируема с квадратом, то равномерно относительно x в каждом конечном интервале для $\delta > 0$

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} \int_{\left| \frac{m}{n} \right| < \frac{1}{\delta}} f_n^{(1)}(\sqrt{n+mx} - y) dF_2^{*m}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

V.2.27. а) Установить, пользуясь результатами задач V.2.25, V.2.26, что если ξ_1, ξ_2, \dots — последовательность независимых одинаково распределенных величин $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = 1$, и функция распределения $F(x)$ имеет отличную от нуля абсолютно непрерывную компоненту, то для абсолютно непрерывной компоненты $p_n(x)$ функции распределения величины $\frac{1}{\sqrt{n}}(\xi_1 + \dots + \xi_n)$, будем иметь

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| p_n(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \right| dx = 0.$$

б) Показать, что то же самое будет и в случае, если существует такое n_0 , что функция распределения величины $\xi_1 + \dots + \xi_{n_0}$ имеет абсолютно непрерывную компоненту.

V.2.28. Величины ξ_k , $k \geq 1$, — независимы,

$$P\{\xi_k = 0\} = q_k, \quad P\{\xi_k = 1\} = p_k = 1 - q_k.$$

Доказать, что если $S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ и $\sum_{k=1}^n p_k q_k = +\infty$, то

$$\mathbf{P}\{S_n = m\} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi b_n}} \exp\left\{-\frac{(m - a_n)^2}{2b_n}\right\},$$

где

$$a_n = \sum_{k=1}^n p_k, \quad b_n = \sum_{k=1}^n p_k q_k, \quad \left| \frac{m - a_n}{b_n} \right| \leq c = \text{const} < \infty.$$

V.2.29. Построить асимптотическое выражение для вероятности

$$P_n(m) = \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k = m\right\},$$

где ξ_k — независимые величины,

$$\mathbf{P}\{\xi_k = 0\} = q, \quad \mathbf{P}\{\xi_k = 1\} = p = 1 - q.$$

V.2.30. Величины ξ_k имеют распределения с плотностью

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left(e^{-\frac{(x-1)^2}{2}} + e^{-\frac{(x+1)^2}{2}} \right).$$

Построить асимптотическое разложение для плотности $p_n(x)$ величины: $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{2n}}$.

§ 3. БЕЗГРАНИЧНО ДЕЛИМЫЕ И УСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Закон распределения $F(x)$ называется безгранично делимым, если для каждого $n \geq 1$ его можно представить в виде n -кратной свертки некоторой функции распределения $F_n(x)$.

$$F(x) = F_n^{*n}(x).$$

В терминах характеристических функций это означает, что его характеристическую функцию $\varphi(z)$ (которую также называют безгранично делимой) для каждого $n \geq 1$ можно представить в виде $\varphi(z) = \varphi_n^n(z)$, где $\varphi_n(z)$ — также характеристическая функция.

Теорема 1. Если $\varphi(z)$ — безгранично делимая функция, то $\varphi(z) \neq 0$ для всех $z \in R_1$, и ее логарифм может быть представлен единственным способом в виде

$$\ln \varphi(z) = iaz + \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) \frac{1+x^2}{x^2} d\psi(x), \quad (a)$$

где $a \in R_1$ и $\psi(x)$ — монотонно неубывающая непрерывная справа функция такая, что $\psi(-\infty) = 0$ и $\psi(+\infty) < \infty$, а подынтегральная функция в точке 0 определяется по непрерывности и равна $-\frac{z^2}{2}$.

Представление (а) называют каноническим представлением логарифма характеристической функции безгранично делимого закона.

Безгранично делимые законы играют важную роль в теории вероятностей, в частности, они выступают как предельные распределения для сумм независимых случайных величин в схеме серий.

Пусть $\xi_{1n}, \dots, \xi_{k_n n}$ при каждом $n = 1, 2, \dots$ ($k_n \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$) — независимые в совокупности случайные величины, удовлетворяющие условию равномерной бесконечной малости

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} P\{|\xi_{kn}| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty, \varepsilon > 0.$$

Имеет место такая теорема:

Теорема 2. (Центральный критерий сходимости). Семейство предельных законов для сумм равномерно безгранично малых случайных величин совпадает с классом безгранично делимых законов.

Для того, чтобы распределения сумм S_n сходились слабо к безгранично делимому закону, логарифм характеристической функции которого имеет каноническое представление (а), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

а) в каждой точке x непрерывности $\psi(x)$

$$\sum_{k=1}^{k_n} F_{nk}(x) \rightarrow \int_{-\infty}^x \frac{1+y^2}{y^2} d\psi(y) \text{ для } x < 0;$$

$$\sum_{k=1}^{k_n} (1 - F_{nk}(x)) \rightarrow \int_x^{\infty} \frac{1+y^2}{y^2} d\psi(y) \text{ для } x > 0;$$

здесь $F_{nk}(x) = P\{\xi_{nk} < x\}$;

б) для фиксированного $\tau > 0$, для которого точки $\pm \tau$ являются точками непрерывности $\psi(x)$,

$$\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x| < \tau} dF_{nk}(y) \rightarrow a + \int_{|y| < \tau} y d\psi(y) - \int_{|y| > \tau} \frac{1}{y} d\psi(y), \text{ при } n \rightarrow \infty;$$

$$\text{в) } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{k_n} \left(\int_{|x| < \varepsilon} y^2 dF_{nk}(y) - \left(\int_{|x| < \varepsilon} y dF_{nk}(y) \right)^2 \right) - (\psi(+0) - \psi(-0)) \right) = 0.$$

Кроме того, безгранично делимые законы являются распределениями значений широкого класса процессов с независимыми прира-

щениями. Важную роль среди безгранично делимых законов играют устойчивые распределения.

Закон распределения и его характеристическую функцию называют устойчивыми, если для произвольных $b', b'' > 0$ существуют числа $a, b > 0$ такие, что

$$\varphi(b'z) \varphi(b''z) = e^{-iza} \varphi(bz).$$

Теорема 3. *Для того, чтобы характеристическая функция $\varphi(z)$ была устойчивой, необходимо, чтобы она допускала представление*

$$\ln \varphi(z) = iaz - c|z|^\alpha \left(1 - i\beta \frac{z}{|z|} \omega(z, a)\right), \quad (6)$$

где

$$a \in R_1, c \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1, 0 < \alpha \leq 2,$$

$$\omega(z, a) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} a & \text{для } a \neq 1, \\ \frac{2}{\pi} \ln |z| & \text{для } a = 1. \end{cases}$$

Параметр α называют показателем устойчивого закона.

Устойчивые законы выступают как предельные распределения для нормированных сумм независимых одинаково распределенных величин.

Пусть ξ_1, ξ_2, \dots — независимые одинаково распределенные случайные величины и $\zeta_n = \frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{B_n} - A_n$, где $A_n, B_n > 0$ — нормирующие коэффициенты.

Имеет место такая теорема:

Теорема 4. *Семейство предельных законов для сумм независимых одинаково распределенных величин ζ_n совпадает с классом устойчивых законов.*

Для того, чтобы распределение ζ_n сходилось к нормальному закону с характеристической функцией $e^{-\frac{1}{2}z^2}$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \int_{|y| > x} dF(y)}{\int_{|y| < x} y^2 dF(y)} = 0,$$

$$F(x) = P\{\xi_1 < x\}.$$

При этом можно взять $A_n = nM\xi_1$, а B_n выбрать так, чтобы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{B_n^2} \int_{|x - M\xi_1| \leq B_n} (x - M\xi_1)^2 dF(x) = 1 \text{ и } B_n \rightarrow \infty.$$

Для того, чтобы распределение ξ_n сходилось к устойчивому закону с параметром $\alpha < 2$, необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{1 - F(x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow p \text{ при } x \rightarrow +\infty \\ & \frac{F(-x)}{1 - F(x) + F(-x)} \rightarrow q \text{ при } x \rightarrow +\infty, \\ 2) \quad & 1 - F(x) + F(-x) \sim \frac{2 - \alpha}{\alpha} x^{-\alpha} L(x) \text{ при } x \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

где $L(x)$ — медленно меняющаяся функция, т. е. для любого фиксированного $y > 0$

$$\frac{L(yx)}{L(x)} \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow \infty.$$

При этом можно выбрать B_n , удовлетворяющим условию:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n(F(-B_n) + 1 - F(B_n)) = 1 \text{ и } A_n = nM\xi_1 \text{ при } 1 < \alpha < 2^n,$$

$$A_n = 0 \text{ при } 0 < \alpha < 1 \text{ и } A_n = n \int_{|x| < B_n} x dF(x) \text{ при } \alpha = 1.$$

V.3.1. Доказать, что для бесконечно делимой характеристической функции $\varphi(z) \neq 0$ для всех $z \in R_1$.

Указание. Воспользоваться неравенством, данным в задаче V.1.61.

V.3.2. Доказать, что безгранично делимыми являются: а) нормальный закон; б) закон Пуассона; в) вырожденный закон; г) показательное распределение. Найти a и $\psi(z)$ для этих законов.

V.3.3. Доказать, что для всех $\alpha > 0$ $\varphi(z) = \frac{1}{(1 - iz)^\alpha}$ есть безгранично делимая характеристическая функция. Найти каноническое представление для ее логарифма.

V.3.4. Доказать, что для $0 \leq \alpha < 2$ функция $\varphi(z) = e^{-|z|^\alpha}$ — характеристическая функция безгранично делимого закона. Найти каноническое представление ее логарифма.

V.3.5. Доказать, что случайная величина, распределенная по закону Коши $F(x) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x-b}{a} \right)$, безгранично делима.

V.3.6. Из представления (а) получить такое представление характеристической функции безгранично делимого закона

$$\ln \varphi(z) = ibz - \frac{\sigma^2}{2} z^2 + \int_{-\infty}^0 \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) dM(x) + \\ + \int_0^{\infty} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) dN(x),$$

где $b \in R_1$, $\sigma^2 \geq 0$; функции $M(x)$ и $N(x)$: а) не убывают соответственно на $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$; б) $M(-\infty) = N(+\infty) = 0$; в) для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\int_{-\varepsilon}^0 x^2 dM(x) + \int_0^{\varepsilon} x^2 dN(x) < \infty.$$

Найти связь между $(a, \varphi(\cdot))$ и $(b, \sigma^2, M(\cdot), N(\cdot))$ в представлениях (а) и (б).

V.3.7. Пусть $\varphi(z)$ — характеристическая функция, соответствующая безгранично делимому закону с конечной дисперсией. Образовать для этого случая из представления (а) такое представление:

$$\ln \varphi(z) = izc + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izx} - 1 - izx) \frac{1}{x^2} dK(x), \quad (в)$$

где $c \in R_1$ и $K(x)$ — неубывающая функция такая, что $K(-\infty) = 0$, $K(+\infty) < \infty$.

Найти связь между $(a, \psi(x))$ и $(c, K(x))$ в представлениях (а) и (в). Доказать, что $D\xi = K(+\infty)$.

V.3.8. Доказать, что если ξ — неотрицательная случайная величина и ее распределение безгранично делимо, то

$$Me^{iz\zeta} = \exp \left\{ iaz + \int_0^{\infty} (e^{izx} - 1) dG(x) \right\}, \quad (г)$$

где $a \geq 0$, $G(x)$ — неубывающая функция такая, что

$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x} dG(x) < \infty$, и обратно, величина ξ с характеристической функцией

ческой функцией (γ), де $a \geq 0$, с вероятностью 1 неотрицательна.

V.3.9. Пусть $a_n \in R_1$ и $\psi_n(+\infty) < \infty$, $\varphi_n(z)$ — соответствующие безгранично делимые характеристические функции. Показать, что для того, чтобы $\varphi_n(z) \rightarrow \varphi_0(z)$ при $n \rightarrow \infty$, $z \in R_1$, достаточно, чтобы: а) $a_n \rightarrow a_0$ при $n \rightarrow \infty$; б) $\psi_n(x) \rightarrow \psi_0(x)$ при $n \rightarrow \infty$ в точках непрерывности $\psi_0(x)$; в) $\psi_n(+\infty) \rightarrow \psi_0(+\infty)$ при $n \rightarrow \infty$.

V.3.10. Доказать, что если $\varphi(z)$ — безгранично делимая характеристическая функция, то для любого $\gamma > 0$ функция $\varphi(z)^\gamma$ также безгранично делимая характеристическая функция.

V.3.11. Доказать, что семейство безгранично делимых законов совпадает с семейством предельных в смысле слабой сходимости законов для функций распределения слу-

чайных величин вида $\xi = \sum_{k=1}^l \xi_k$, где ξ_k — независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона на решетке $a_k + nb_k$, $n = 0, 1, \dots$.

V.3.12. Доказать, что если ξ имеет безгранично делимое распределение и существует такое $\sigma > 0$, что $P\{|\xi| > \sigma\} = 0$, то $P\{\xi = M\xi\} = 1$.

V.3.13. Доказать, что характеристическая функция

$$f(z) = \frac{1-\beta}{1+\alpha} \cdot \frac{1+\alpha e^{-iz}}{1-\beta e^{iz}} \quad (0 < \alpha \leq \beta < 1)$$

не является безгранично делимой, но это свойство имеет функция $|f(z)|$.

V.3.14. Величина ξ имеет арифметическое распределение с шагом h . Если распределение безгранично делимо, то существуют такие $q_k \geq 0$ и целое n , что

$$Me^{iz\xi} = \exp \left\{ inh z + \sum_{k=-\infty}^{\infty} q_k (e^{izkh} - 1) \right\}.$$

V.3.15. Если ξ имеет безгранично делимое и арифметическое распределение с шагом h , то

$$\xi = \sum_{k=-\infty}^{\infty} kh v_k,$$

где v_k — независимые случайные величины, имеющие распределение Пуассона.

V.3.16. Пусть $\eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{n}$, где случайные величины ξ_n , $n \geq 1$, независимы и имеют плотность $\frac{1}{2} e^{-|x|}$. Доказать, что случайная величина η безгранично делима и найти ее каноническое представление.

V.3.17. Если ξ — нормально распределенная величина и $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 имеют безгранично делимые распределения и независимы, то ξ_1 и ξ_2 имеют безгранично делимое распределение. Доказать это.

V.3.18. Если ξ имеет распределение Пуассона и $\xi = \xi_1 + \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 независимы и имеют безгранично делимое распределение, то ξ_1 и ξ_2 также имеют распределение Пуассона. Доказать это.

V.3.19. Пусть $\varphi(z)$ безгранично делимая характеристическая функция. Тогда существуют такие постоянные a и b , что $|\ln \varphi(z)| < a + bz^2$ для всех $z \in R_1$.

V.3.20. Пусть $P(s)$ — производящая функция некоторого распределения $p_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Допустим, что $p_0 > 0$ и что $\ln \frac{P(s)}{p_0}$ разлагается в степенной ряд с положительными коэффициентами. Если $\varphi(z)$ — характеристическая функция распределения $F(x)$, то $P(\varphi(z))$ — безгранично делимая характеристическая функция. Найти каноническое представление для $\ln P(\varphi(z))$ (через свертки $F^{*n}(\cdot)$).

V.3.21. Пусть v, ξ_1, ξ_2, \dots — независимые случайные величины, причем случайная величина v принимает целые неотрицательные значения и имеет безгранично делимое распределение. Обозначим $S_0 = 0$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Тогда величина S_v имеет безгранично делимое распределение. Найти каноническое представление для логарифма ее характеристической функции.

V.3.22. 1) Сформулировать центральный критерий сходимости в терминах представления б).

2) Вывести из центрального критерия сходимости необходимые и достаточные условия для сходимости: а) к нормальному закону; б) к вырожденному закону; в) к закону Пуассона.

3) Доказать, что для того, чтобы случайные величины $S_n - a_n$ имели предельное распределение, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия а) и в) центрального критерия сходимости и при этом все постоянные a_n имели вид

$$a_n = \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|y| < \tau} y dF_{nk}(y) - a - \int_{|y| < \tau} y d\psi(y) + \\ + \int_{|y| \geq \tau} \frac{1}{y} d\psi(y) + o(1),$$

где τ — фиксированные точки непрерывности функции $\psi(x)$.

V.3.23. Доказать, что характеристическая функция вида $e^{-|z|^\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 2$, является устойчивой.

V.3.24. Доказать, что распределения с плотностями

$$p_1(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)} \text{ и } p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} x^{3/2} e^{-1/x}$$

являются устойчивыми.

V.3.25. а) Доказать, что характеристические функции, которые допускают представление, приведенное в теореме 3, являются устойчивыми.

б) Доказать, что устойчивые законы безгранично делимы.

V.3.26. Доказать, что невырожденные устойчивые распределения имеют плотность.

V.3.27. Доказать, что плотность устойчивого закона с параметрами $\gamma = 0$, $\alpha < 1$, $\beta = +1$ сосредоточена на положительной полуоси.

V.3.28. Пусть ξ — случайная величина, имеющая устойчивое распределение с показателем α . Доказать, что существуют все моменты $M|\xi|^\gamma < \infty$, для $\gamma < \alpha$.

V.3.29. Используя теорему 4, доказать, что:

а) соотношение $\int_{-x}^x y^2 dF(y) \sim x^{2-\alpha} L(x)$ при $x \rightarrow \infty$ эквивалентно условию (а), если $\alpha = 2$, и условию (б), если $\alpha < 2$;

б) для логарифма характеристической функции устойчивого закона с параметром $\alpha < 2$ имеет место представление

$$\ln \varphi(z) = iaz + \int_{-\infty}^0 \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) dM(x) + \\ + \int_0^{\infty} \left(e^{izx} - 1 - \frac{izx}{1+x^2} \right) dN(x),$$

где $M(x) = \frac{c_1}{|x|^\alpha}$, $N(x) = -\frac{c_2}{x^\alpha}$, $c_1, c_2 \geq 0$, $c_1 + c_2 > 0$;

в) нормирующие коэффициенты B_n удовлетворяют условию $\frac{B_{n+1}}{B_n} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

V.3.30. Доказать, что в том случае, когда распределение ξ_n сходится к устойчивому закону с показателем $\alpha \leq 2$, то $M|\xi_1|^{\gamma} < \infty$ для всех $\gamma < \alpha$.

§ 4. ВИНЕРОВСКИЙ ПРОЦЕСС

Процессом броуновского движения, или винеровским процессом, называют процесс с непрерывным временем $\omega(t)$, $t \geq 0$, который имеет следующие свойства:

а) $\omega(t)$ — процесс с независимыми приращениями, т. е. для всех $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $n \geq 1$, случайные величины $\omega(t_1)$, $\omega(t_2) - \omega(t_1)$, \dots , $\omega(t_n) - \omega(t_{n-1})$ независимы между собой;

б) $\omega(t)$ как функция t с вероятностью 1 непрерывна ($\omega(t)$ на самом деле есть функция двух переменных $\omega(t, \omega)$, где ω элементарное событие исходного вероятностного пространства (Ω, F, P) и $\omega(t, \omega)$ должна быть непрерывной функцией t почти для всех ω).

в) процесс $\omega(t)$ однородный, что означает независимость распределения величины $\omega(t+h) - \omega(t)$ от t для каждого $h > 0$.

Имеет место теорема:

Теорема. Если $\omega(t)$ — винеровский процесс, то существуют такие константы $a \in R_1$ и $b \geq 0$, что для всех $t \geq 0$

$$Me^{iz\omega(t)} = e^{izat - \frac{1}{2}bt^2},$$

т. е. для каждого t случайная величина $\omega(t)$ имеет нормальное распределение со средним at и дисперсией bt .

Коэффициенты a и b называются соответственно, коэффициентами переноса и диффузии процесса $\omega(t)$.

Винеровский процесс с начальным положением $\omega(0) = 0$ с вероятностью 1 и коэффициентами переноса и диффузии $a = 0$ и $b = 1$ называется стандартным винеровским процессом.

Примечание. Винеровский процесс является математической моделью явления движения микроскопических частиц в жидкости или газе под действием молекул среды, находящихся в тепловом хаотическом движении. Впервые это физическое явление наблюдалось английским ботаником Броуном в 1827 г. Математическое описание этого процесса было дано Н. Винером в 1918 г.

V.4.1. Доказательство теоремы 1 базируется на доказательстве того факта, что при выполнении условий (а) и (б) для сумм независимых одинаково распределенных величин

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^n \left(\omega\left(t \frac{k}{n}\right) - \omega\left(t \frac{k-1}{n}\right) \right)$$

выполняется условие притяжения к нормальному закону.

Используя условия (а) — (в), проверить выполнение первого из этих условий:

$$nP \left\{ \left| \omega\left(\frac{t}{n}\right) - \omega(0) \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

V.4.2. Пусть $\omega(t)$ — одномерный винеровский процесс с коэффициентами a , b и $\omega(0) = 0$. Проверить, что для процесса $\omega(t)$ среднее $m(t) = M\omega(t) = at$ и корреляционная функция $R(t, s) = b \min(t, s)$.

V.4.3. Пусть $\omega(t)$ — одномерный винеровский процесс с коэффициентами a и $b \neq 0$. Доказать, что процесс $\frac{\omega(t) - \omega(0) - at}{b}$ является стандартным винеровским процес-

сом, и обратно, если $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс, то процесс $at + b\omega(t)$, $t \geq 0$, является винеровским процессом с коэффициентом переноса a и диффузией b .

V.4.4. Пусть $\omega(t)$ — одномерный винеровский процесс с коэффициентами a и b и τ независимая от процесса $\omega(t)$ случайная величина, распределенная согласно показательному закону с параметром λ . Найти характеристическую функцию случайной величины $\omega(\tau)$.

V.4.5. Пусть $\omega(t)$ — одномерный винеровский процесс с коэффициентами переноса a и диффузии b , $\omega(0) = 0$. Через $p(x, t, y)$ обозначим плотность случайной величины $\omega(t+x)$. Доказать, что функция $p(x, t, y)$ для $x \in R_1$, $t > 0$, удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial P(x, t, y)}{\partial t} = a \frac{\partial P(x, t, y)}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 P(x, t, y)}{\partial x^2}.$$

V.4.6. Пусть $f(x)$ — ограниченная непрерывная функция. Доказать, что функция $U(t, x) = Mf(\omega(t+x))$ удовлетворяет при $x \in R_1$, $t > 0$, дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial U(t, x)}{\partial t} = a \frac{\partial U(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} b \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2}.$$

V.4.7. Пусть $\xi(t)$, $t \geq 0$, — случайный процесс со значениями в R_1 , имеющий свойства:

1) процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, непрерывный с вероятностью 1,
 2) процесс $\xi(t)$, $t \geq 0$, есть гауссовский процесс, т. е. для любых $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, $n \geq 1$, случайный вектор $(\xi(t_1), \dots, \xi(t_n))$ имеет многомерное нормальное распределение.

а) Доказать, что среднее $m(t) = M\xi(t)$, $t \geq 0$, и корреляционная функция $R(t, s) = M(\xi(t) - m(t))(\xi(s) - m(s))$ процесса $\xi(t)$ — непрерывна.

б) Доказать, что в случае, когда корреляционная функция $R(t, s)$ удовлетворяет условию $R(t, s) = R(\min(t, s))$ для всех $t, s \geq 0$, где $R(t) = R(t, t)$, то $\xi(t)$ — процесс с независимыми приращениями.

в) Доказать, что для того, чтобы непрерывный гауссовский процесс $\xi(t)$ был винеровским процессом, необходимо и достаточно, чтобы функция средних и корреляционная функция процесса $\xi(t)$ имели вид:

$$m(t) = at, \quad t \geq 0 \quad \text{и} \quad R(t, s) = b \min(t, s), \quad t, s \geq 0.$$

V.4.8. Пусть $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс. Найти совместную плотность случайных величин $\omega(t_1)$, $\omega(t_2)$, \dots , $\omega(t_n)$ (здесь $0 < t_1 < \dots < t_n$).

V.4.9. Пусть $t < s$. Найти условную функцию распределения $P\{\omega(t) < x / \omega(s) = y\}$ и соответствующую условную плотность.

V.4.10. Доказать, что условная плотность величины $\omega(t)$ при условиях, что $\omega(t_1) = y_1$ и $\omega(t_2) = y_2$ при $t_1 < t < t_2$, является нормальной со средним $y_1 + \frac{y_2 - y_1}{t_2 - t_1}(t - t_1)$ и дисперсией $\frac{(t_2 - t)(t - t_1)}{t_2 - t_1}$.

V.4.11. Пусть $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс и $f(x)$ — ограниченная измеримая функция. Доказать, что

$$M \int_0^T f(\omega(s)) ds = \int_0^T \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{y^2}{2s}} dy ds.$$

V.4.12. Пусть $\omega(t)$ — одномерный винеровский процесс с коэффициентами a , b и $g_1(t)$, \dots , $g_k(t)$ — интегрируе-

мые на $[0, T]$ функции. Доказать, что случайный вектор $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_k)$, где

$$\eta_i = \int_0^T g_i(t) \omega(t) dt, \quad i = \overline{1, k},$$

имеет многомерное нормальное распределение с вектором средних $\bar{d} = (d_1, \dots, d_k)$ и корреляционной матрицей $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^k$, задающейся соотношениями

$$d_i = a \int_0^T g_i(t) t dt, \quad i = \overline{1, k},$$

и

$$c_{ij} = b \int_0^T \int_0^T g_i(t) g_j(s) \min(t, s) dt ds; \quad i, j = \overline{1, k}.$$

V.4.13. Пусть $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс и $g(t)$ — непрерывная дифференцируемая функция. Обозначим

$$\int_0^T g(s) d\omega(s) = \omega(T) g(T) - \int_0^T g'(s) \omega(s) ds.$$

Доказать, что если $g_1(t)$ и $g_2(t)$ — две непрерывные дифференцируемые функции, то

$$M \int_0^T g_1(s) d\omega(s) \int_0^T g_2(s) d\omega(s) = \int_0^T g_1(s) g_2(s) ds.$$

V.4.14. Пусть $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс и $\varphi_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ — последовательность непрерывно дифференцируемых функций на $[0, T]$, взаимно ортогональных в $L_2[0, T]$, т. е.

$$\int_0^T \varphi_k(t) \varphi_j(t) dt = 0, \quad k \neq j.$$

Доказать, что случайные величины

$$\eta_k = \int_0^T \varphi_k(t) d\omega(t), \quad k = 1, 2, \dots$$

являются последовательностью независимых нормально распределенных величин, для которых $M\eta_k = 0$ и $D\eta_k = \int_0^T \varphi_k^2(t) dt$.

V.4.15. Пусть $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс и $g_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$ — полная ортонормированная в $L_2[0, T]$ последовательность функций, удовлетворяющих условиям

$$\int_0^T \int_0^T g_k(t) g_j(s) \min(t, s) dt ds = \begin{cases} 0 & \text{для } k \neq j \\ 1 & \text{для } k = j \end{cases} \quad (1)$$

а) Доказать, что величины $\zeta_k = \int_0^T \omega(s) g_k(s) ds$ являются последовательностью независимых, нормально распределенных случайных величин со средним 0 и дисперсией 1 и

$$\omega(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k g_k(t),$$

где ряд сходится в том смысле, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T M \left(\omega(t) - \sum_{k=1}^n \zeta_k g_k(t) \right)^2 dt = 0.$$

б) Доказать, что функции $g_k(t)$, образующие полную ортонормированную систему в $L_2[0, T]$, и, кроме того, удовлетворяют условиям (1), являются собственными функциями интегрального уравнения

$$g_k(t) = \lambda_k \int_0^T \min(t, s) g_k(s) ds. \quad (2)$$

в) Найти собственные значения и собственные функции уравнения (2).

V.4.16. Доказать, что если величины ζ_k определены так, как и в задаче V.5.14, то

$$\int_0^T \omega(t)^2 dt = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k^2.$$

Использовать этот факт для нахождения преобразования Лапласа

$$Me^{-s \int_0^T \omega(t)^2 dt} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{2s}{\lambda_k}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где

$$\lambda_k = \frac{\pi^2}{4T^2} (4k^2 - 1).$$

V.4.17. Пусть $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс и $0 \subset t_{0n} < t_{1n} < \dots < t_{nn} = 1$ — последовательность разбиений промежутка $[0, 1]$, такая, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} (t_{in} - t_{i-1n}) \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Обозначим

$$u_k = \sum_{i=0}^{n-1} (\omega(t_{in}) - \omega(t_{i+1n}))^2.$$

Доказать, что $Mu_n = 1$ для всех n и $\lim_{n \rightarrow \infty} Mu_n^2 = 1$.

V.4.18. Процесс $\bar{\omega}(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_k(t))$, $t \geq 0$, с непрерывным временем, принимающий значения в R_k , называют k -мерным винеровским процессом, если для каждого $\bar{z} \in R_k$ процесс $(\bar{z}, \bar{\omega}(t))$, $t \geq 0$, является числовым винеровским процессом. Доказать, что в этом случае существует вектор $\bar{a} \in R_k$ и неотрицательно определенная матрица $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^k$ такие, что для каждого $t \geq 0$

$$Me^{i(\bar{z}, \bar{\omega}(t))} = e^{i(\bar{z}, \bar{a})t - \frac{1}{2} t(B\bar{z}, \bar{z})}.$$

Вектор \bar{a} называют вектором переноса, а матрицу B — оператором диффузии k -мерного винеровского процесса $\bar{\omega}(t)$.

V.4.19. Пусть $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, k}$ — стандартные винеровские процессы, независимые между собой (это означает, что для произвольных $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, $n \geq 1$, группы величин $\{\omega_i(t_1), \dots, \omega_i(t_n)\}$, $i = \overline{1, k}$ независимы между собой).

Определим процессы

$$\omega'_i(t) = a_i t + \sum_{j=1}^k b_{ij} \omega_j(t), \quad i = \overline{1, l}.$$

Доказать, что процесс $\bar{\omega}(t) = (\omega'_i(t), i = \overline{1, l}), t \geq 0$, является l -мерным винеровским процессом, и найти его вектор переноса и оператор диффузии.

V.4.20. Пусть $\bar{\omega}(t) = (\omega_1(t), \dots, \omega_k(t)), t \geq 0$, — k -мерный винеровский процесс с вектором переноса \bar{a} и оператором диффузии $B = \|b_{ij}\|_{i,j=1}^k$. Определим процессы

$$\omega'_i(t) = d_i(t) + \sum_{j=1}^k c_{ij} \omega_j(t), \quad i = \overline{1, k}.$$

Доказать, что процесс $\bar{\omega}'(t) = (\bar{\omega}'_1(t), \dots, \bar{\omega}'_k(t)), t \geq 0$, — является k -мерным винеровским процессом и найти его вектор переноса и оператор диффузии.

V.4.21. Пусть $\bar{\omega}(0) = 0$. Найти условие, при котором можно брать вектор $\bar{d} = (d_i, i = \overline{1, k})$ и матрицу $C = \|c_{ij}\|_{i,j=1}^k$ так, чтобы процессы $\omega_i(t), i = \overline{1, k}$ были независимыми стандартными винеровскими процессами.

§ 5. ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ ВИНЕРОВСКОГО ПРОЦЕССА¹

V.5.1. Определим функционал $\tau_a = \inf(t : \omega(t) > a)$. Показать, что для произвольных $0 \leq t \leq \dots \leq t_l, s \leq +\infty$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\omega(\tau_a + t_i) - \omega(\tau_a) < x_i, i = \overline{1, l} / \tau_a < s\} = \\ = \mathbf{P}\{\omega(t_i) < x_i, i = \overline{1, l}\}. \end{aligned}$$

V.5.2. Определим $\tilde{\omega}(t) = \omega(t)$ для $t < \tau_a$ и $\tilde{\omega}(t) = 2a - \omega(t)$ для $t \geq \tau_a$. Доказать, что процесс $\tilde{\omega}(t)$ является также винеровским процессом.

¹ В задачах этого параграфа $\omega(t)$ — стандартный винеровский процесс.

V.5.3. Доказать, что для $a \geq x$

$$\mathbf{P} \left\{ \sup_{t \leq T} \omega(t) < a, \omega(T) < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi T}} \left(\int_{-\infty}^x e^{-\frac{u^2}{2T}} du - \int_{2a-x}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2T}} du \right).$$

V.5.4. Доказать, что $\mathbf{P}\{\tau_a < \infty\} = 1$ для произвольного $a > 0$. Найти распределение величины τ_a и доказать, что

$$\mathbf{M}e^{-s\tau_a} = e^{-\sqrt{2s}a}.$$

V.5.5. Доказать, что τ_a как функция $a \geq 0$ является процессом с независимыми приращениями, т. е. для любых $0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_l$, $l \geq 1$, величины τ_a , $\tau_{a_2} - \tau_{a_1}$, \dots , $\tau_{a_l} - \tau_{a_{l-1}}$ — независимы. Распределение величины $\tau_{a+b} - \tau_a$ для произвольного $a \geq 0$ совпадает с распределением величины τ_b .

V.5.6. Найти распределение величины

$$\sup_{a \leq s \leq b} \omega(s).$$

V.5.7. Пусть $t \leq T$. Доказать, что

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq T} \omega(s) \leq a, \omega(t) < y \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^y \mathbf{P} \left\{ \sup \omega(s) < a - x \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{x^2}{2t}} - e^{-\frac{(2a-x)^2}{2t}} \right) dx. \end{aligned}$$

V.5.8. Обозначим $\tau'_a = \sup(t : \omega(t) < a)$. Доказать, что для всех $a > 0$

$$\mathbf{P}\{\tau'_a = \tau_a\} = 1.$$

V.5.9. Найти вероятность $P_{t_1 t_2}$ того, что в интервале $[t_1, t_2]$ случайная величина $\omega(t)$ хоть один раз достигнет нулевого значения.

V.5.10. Пусть ξ — максимальный нуль случайной функции $\omega(t)$, не больший T . Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\xi < t\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{\frac{t}{T}}.$$

V.5.11. Пусть η — минимальный нуль $\omega(t)$, больший T . Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\eta < t\} = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{T}{t}}.$$

V.5.12. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\xi < t_1, \eta < t_2\} = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}.$$

V.5.13. Обозначим $\omega^+(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \omega(s)$. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\omega^+(t) > x/\omega(T) = \omega^+(T)\} = e^{-\frac{x^2}{2T}}.$$

V.5.14. Доказать, что процесс $X(t) = \omega^+(t) - \omega(t)$ является марковским процессом, т. е. для любых $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_l \leq t, h \geq 0$,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{X(t+h) < x/x(t) = y, X(t_1), \dots, X(t_l)\} = \\ = \mathbf{P}\{X(t+h) < x/X(t) = y\}. \end{aligned}$$

V.5.15. Доказать, что процесс $|\omega(t)|$ является марковским процессом.

V.5.16. Доказать, что случайные процессы $|\omega(t)|$ и $X(t)$ имеют одинаковые конечномерные распределения.

V.5.17. Найти условную вероятность того, что процесс $\omega(t)$ не обращается в нуль в интервале (t_0, t_1) , $0 < t_0 \leq t_1 \leq t_2$.

V.5.18. Доказать, что вероятность того, что процесс $\omega(t)$ не обращается в нуль на интервале $(0, t_2)$ при условии, что $\omega(t)$ не обращается в нуль на интервале $(0, t_1)$, $0 < t_1 < t_2$, равна $\sqrt{t_1 t_2^{-1}}$.

V.5.19. Доказать, что для $a, b > 0$

$$\mathbf{P}\{\omega(s) \neq 0, s \in (0, t)/\omega(0) = a, \omega(t) = b\} = 1 - e^{-2abt}.$$

V.5.20. Доказать, что

$$\mathbf{P}\{\omega(1) < x/\omega(u) > 0, 0 \leq u \leq 1\} = 1 - e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

V.5.21. Пусть $\omega^+(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} \omega(s)$ и

$$q_a(t, x) = \mathbf{P}\{\omega^+(t) \leq a - x, \omega(t) < y - x\}.$$

Доказать, что функция $q_a(t, x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} q_a(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} q_a(t, x), \quad x < a, \quad t > 0,$$

и граничным условиям:

$$\lim_{x \uparrow a} q_a(t, x) = 0,$$

$$\lim_{t \downarrow 0} q_a(t, x) = \begin{cases} 1, & \text{для } x < y, \\ 0, & \text{для } x > y. \end{cases}$$

V.5.22. Пусть $u(x)$ — вероятность того, что процесс $\omega(t)$ раньше достигнет из точки x уровня b , чем уровня c , где $c < b$. Доказать, что $u(x)$ удовлетворяет соотношению

$$u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_c^b \exp\{-(x-y)^2/2t\} u(y) dy + o(t^2), \text{ если } t \rightarrow 0,$$

при любом $c < x < b$. Используйте это соотношение, чтобы показать, что $u(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $u''(x) = 0$ с граничными условиями $u(c) = 0$, $u(b) = 1$. Найти $u(x)$.

V.5.23. Обозначим $q_{a,b}(t, x) = \mathbf{P} \left\{ \sup_{0 \leq s \leq t} \omega(s) < b - x, \right.$
 $\left. \inf_{0 \leq s \leq t} \omega(s) \geq a - x \right\}$, где $a < x < b$, $t > 0$. Доказать, что функция $q_{a,b}(t, x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} q_{a,b}(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} q_{a,b}(t, x)$$

с граничными условиями:

$$\lim_{t \downarrow 0} q_{a,b}(t, x) = 1,$$

$$\lim_{x \uparrow a} q_{a,b}(t, x) = \lim_{x \uparrow b} q_{a,b}(t, x) = 0.$$

V.5.24. Пусть $\xi_{a,b} = \min(\tau_a^*, \tau_b)$, где $\tau_a^* = \inf(t: \omega(t) < a)$. Доказать, что функция

$$u_\lambda(x) = \mathbf{M} \exp(-\lambda \xi_{a-x, b-x}), \lambda > 0,$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\lambda u_\lambda(x) = \frac{1}{2} u_\lambda''(x), \quad a < x < b$$

с граничными условиями

$$u_\lambda(a) = u_\lambda(b) = 1.$$

V.5.25. Пользуясь результатом предыдущей задачи, доказать формулу

$$u_{\lambda}(x) = \frac{\operatorname{ch} \sqrt{2\lambda} \left(x - \frac{a+b}{2} \right)}{\operatorname{ch} \sqrt{2\lambda} \frac{a-b}{2}}.$$

V.5.26. Рассмотрим событие $A_k = \left\{ \sup_{a^k < t < a^{k+1}} \omega(t) > c_k \right\}$.

Доказать, что если выбрать

$1 < a < (1 + \varepsilon)^2$ и $c_k = \sqrt{2(1 + \varepsilon^2) a^k \ln \ln a^k}$, где $\varepsilon > 0$,

то среди событий A_k с вероятностью 1 произойдет только конечное число событий. Вывести отсюда, что

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \leq 1 \right\} = 1.$$

V.5.27. Рассмотрим события $B_k = \{ \omega(a^{k+1}) - \omega(a^k) > c_k \}$.

Доказать, что если выбрать $a > 1$ так, чтобы

$$\frac{a}{a-1} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^2 < 1, \text{ где } \varepsilon > 0$$

$$\text{и } c_k = \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right) \sqrt{2a^{k+1} \ln \ln a^k},$$

то среди событий B_k с вероятностью 1 произойдет бесконечное число событий. Вывести отсюда, что

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(a^k)}{\sqrt{2a^k \ln \ln t}} > 1 - \varepsilon \right\} = 1, \quad \varepsilon > 0.$$

V.5.28. Используя условия задач V.5.26 и V.5.27, доказать, что

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{\omega(t)}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right\} = 1.$$

V.5.29. Доказать, что

$$\text{а) } \mathbf{P} \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2t \ln \ln t}} \sup_{0 \leq s \leq t} \omega(s) = 1 \right\} = 1;$$

$$\text{б) } \mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{t \rightarrow \infty} \frac{|\omega(t)|}{\sqrt{2t \ln \ln t}} = 1 \right\} = 1.$$

V.5.30. Пусть $f(x)$ — непрерывная ограниченная функция и

$$u_z(t, x) = M \exp \left\{ iz \int_0^t f(\omega(s)) ds \right\}.$$

Доказать, что функция $u_z(t, x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} u_z(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_z(t, x)}{\partial x^2} + zf(x) u_z(t, x)$$

с начальным условием $u_z(0, x) = 1$.

V.5.31. Обозначим $\Phi_{z, \lambda}(x) = \int_0^\infty u_z(t, x) e^{-\lambda t} dt$. Доказать, что тогда

$$\lambda \Phi_{z, \lambda}(x) - 1 = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi_{z, \lambda}(x) + zf(x) \Phi_{z, \lambda}(x). \quad (a)$$

V.5.32. Воспользовавшись предельным переходом, доказать, что в том случае, когда функция $f(x)$ имеет конечное число точек разрыва, уравнение (a) выполняется для всех точек непрерывности функции $f(x) \Phi_{z, \lambda}(x)$ и $\frac{d}{dx} \Phi_{z, \lambda}(x)$ в этом случае непрерывны.

V.5.33. Пусть $f(x) = 1$ для $x > 0$ и $f(x) = 0$ для $x \leq 0$. Найти $\Phi_{z, \lambda}(x)$. С помощью этой функции доказать соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t f(\omega(s)) ds < x \right\} = \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}.$$

Глава I

§ 1

I.1.3. $A = \emptyset$, $B = (0, 1)$.

I.1.18. Рассмотреть пересечение всех алгебр, которые содержат класс K , и использовать утверждение задачи I.1.16.

I.1.19. $\mathfrak{M}_0(K) = \{\Omega, \emptyset, A, \bar{A}\}$.

I.1.26. Рассмотреть пересечение всех σ -алгебр, которые содержат класс K , и использовать утверждение задачи I.1.25.

I.1.28. а) $\{a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[a, a + \frac{1}{n} \right)$, в) $(a, b) = [a, b] - \{a\}$.

I.1.33. Каждая σ -алгебра является, очевидно, и монотонным классом. Наоборот, пусть \mathfrak{M} — алгебра и монотонный класс. Рассмотрим последовательность множеств A_k из \mathfrak{M} . Последовательность $B_n = \bigcup_{k=1}^n A_k$ является монотонной последовательностью множеств из \mathfrak{M} ($B_n \in \mathfrak{M}$), так как \mathfrak{M} — алгебра. Поскольку \mathfrak{M} — монотонный класс, то $\lim B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{M}$. Поэтому \mathfrak{M} σ -алгебра.

I.1.35. Существует по крайней мере один монотонный класс, который содержит K , например, класс всех подмножеств Ω . Рассмотрим пересечение $\mathfrak{M}_0(K)$ всех монотонных классов, которые содержат класс K . В соответствии с утверждением задачи I.1.34, $\mathfrak{M}_0(K)$ — монотонный класс. Каков бы ни был монотонный класс M , который содержит K , $\mathfrak{M}_0(K) \subset M$. Поэтому $\mathfrak{M}_0(K)$ — минимальный монотонный класс, который содержит класс K .

I.1.36. Поскольку каждая σ -алгебра является монотонным классом, то $M_0(K) \subset F_0(K)$.

I.1.37. а) Имеем $\mathfrak{M} \subset \tilde{M} \subset M$ (если $A \in \mathfrak{M}$) и \mathfrak{M} — алгебра, то $\bar{A} \in \mathfrak{M}$, т. е. $A \in \mathfrak{M} \subset M$, $\bar{A} \in \mathfrak{M} \subset M$, $A \in \tilde{M}$, если $A \in \tilde{M}$, то $A \in M$). Класс M является монотонным классом. Действительно, если $B_n \in \tilde{M}$, $B_n \subset B_{n+1}$, то $\lim B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \subset M$, так как $B_k \in M$,

$$\lim B_n = \overline{\bigcup B_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bar{B}_k \in M,$$

так как $B_k \in M$, а это и означает, что $\lim B_n \in \tilde{M}$. Аналогично доказываем, что из $B_n \in \tilde{M}$ и $B_n \supset B_{n+1}$ следует, что

$$\lim B_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k \in \tilde{M}.$$

Поскольку \tilde{M} — монотонный класс, который содержит \mathfrak{M} , то $M \subset \tilde{M}$. Таким образом, $M = \tilde{M}$.

б) Из равенства $\lim A \cap B_n = A \cap \lim B_n$, которое справедливо для любой монотонной последовательности событий, следует, что M_A — монотонный класс. Если $A \in \mathfrak{M}$, то каково бы ни было множество $B \in \mathfrak{M}$, B принадлежит M_A . Таким образом, если $A \in \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{M} \subset M_A \subset M$. Поскольку M_A — монотонный класс, который содержит \mathfrak{M} , то при $A \in \mathfrak{M}$, $M \subset M_A$, поэтому $M = M_A$. Поскольку по определению класса M_A два утверждения $A \in M_B$ и $B \in M_A$ эквивалентны, то для каждого $A \in \mathfrak{M}$ и каждого $B \in M = M_A$ имеем: $A \in M_B$. Таким образом, $\mathfrak{M} \subset M_B \subset M$ при всех $B \in M$ и, поэтому, $M_B = M$ при всех $B \in M$.

в) Из б) следует, что M — алгебра множеств. Но каждая алгебра, которая является монотонным классом, является и σ -алгеброй (задача I.1.33).

г) Поскольку $M_0(\mathfrak{M}) = M$ есть σ -алгебра множеств, которая содержит класс K , то $F_0(\mathfrak{M}) \subset M_0(\mathfrak{M})$. В соответствии с утверждением задачи I.1.36, $M_0(\mathfrak{M}) \subset F_0(\mathfrak{M})$. Поэтому $F_0(\mathfrak{M}) = M_0(\mathfrak{M})$.

§ 2.

I.2.1. $m \times n$.

I.2.3. $17 \cdot 16 \cdot 15$. I.2.7. $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$.

I.2.9. $(m+1)(n+1)$. I.2.11. $\frac{n(n-3)}{2}$.

I.2.13. Если ни одна прямая не проведена, то число частей равно 1. Очевидно, для того, чтобы число частей было максимальным, необходимо, чтобы никакие три прямые не пересекались в одной точке и никакие две прямые не были параллельными. Будем проводить последовательно прямые, придерживаясь указанных выше условий. Заметим, что после проведения каждой прямой, число частей увеличивается на 1 плюс число точек пересечения, которые появляются. Поэтому, после проведения n прямых число частей увеличится на n плюс число точек пересечения прямых, которое равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Таким образом, число частей равно

$$1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 1 + \frac{n(n+1)}{2}.$$

1.2.14. Пусть A_n — максимальное число частей, на которое делят пространство n плоскостей. Используя предыдущую задачу, доказать, что

$$A_{n+1} = A_n + \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

О т в е т. $A_n = \frac{n^3 + 5n + 6}{6}.$

1.2.16. Пусть A_n — искомое число частей. Доказать, что

$$A_{n+1} = A_n + n^2 - n + 2.$$

1.2.17. $n^2(n-1)^2.$

1.2.21. $(\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_n + 1).$

1.2.23. Все таблицы, которые имеют указанное в условии задачи свойство, можно составить так: всюду, кроме последней строки и последнего столбца, произвольно записываем $+1$ и -1 . Это можно сделать $2^{(m-1)(n-1)}$ способами. Пусть p — произведение всех выписанных чисел. Теперь в каждой из $m-1$ строк на пересечении с n -м столбцом будем писать $+1$ или -1 так, чтобы произведение чисел во всей строке было равно 1. Обозначим произведение чисел, которые будут стоять в n -й строке, через x . Теперь в каждом из первых $n-1$ столбцов на пересечении с m -й строкой выпишем также $+1$ или -1 так, чтобы произведение в столбце было равно 1. Произведение чисел, которые будут вписаны в m -ю строку, обозначим через y . Заметим, что x и y имеют одинаковый знак. Действительно, $px = 1$, $py = 1$ и поэтому $p^2xy = 1$, таким образом, $xy > 0$. Запишем на пересечении m -й строки и n -го столбца 1 с тем знаком, который имеют x и y . Тогда произведение чисел в n -м столбце и m -й строке также будет равно 1. Получили таблицу, которая имеет указанное свойство. Число всех таких таблиц равно $2^{(n-1)(m-1)}$.

1.2.26. Каждой точке пересечения двух диагоналей соответствуют четыре вершины n -угольника, а каждым четверем вершинам n -угольника соответствует одна точка пересечения — точка пересечения диагоналей четырехугольника с вершинами в данных четырех точках. Поэтому число всех точек пересечения равно числу способов, с помощью которых среди n вершин можно выбрать 4 вершины, т. е. равно C_n^4 .

1.2.27. Каждый кратчайший путь из точки $(0, 0)$ в точку (m, n) состоит из $m+n$ отрезков, причем среди них есть m горизонтальных и n вертикальных отрезков. Разные пути отличаются лишь порядком чередования горизонтальных и вертикальных отрезков. Поэтому общее число путей равно числу способов, с помощью которых из $m+n$ отрезков можно выбрать n вертикальных отрезков, т. е. C_{m+n}^n . Можно было бы рассмотреть число способов выбора не n вертикальных, а m горизонтальных отрезков, и мы получили бы ответ C_{m+n}^m . Таким образом, $C_{m+n}^n = C_{m+n}^m$.

1.2.28. а) Рассмотреть кратчайшие пути из точки $(0, 0)$ в точку $(k, n-k)$. Разделить все такие пути на две группы: пути, которые проходят через точку $(k-1, n-k)$, и пути, которые проходят через точку $(k, n-k-1)$.

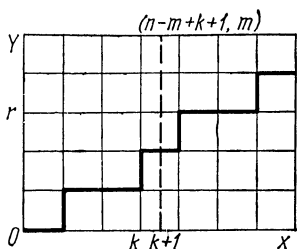


Рис. 8

из точек A_k ($k=0, 1, \dots, n$), получим общее количество путей из O в A , т. е. C_{2n}^n .

в) Рассмотрим все кратчайшие пути из точки $(0, 0)$ в точку $(n-m+k+1, m)$. Разобьем все такие пути на классы L_0, L_1, \dots, L_m , отнеся к классу L_r все те пути, которые пересекают прямую

$x = k + \frac{1}{2}$ в точке $(k + \frac{1}{2}, r)$ (рис. 8). Поскольку каждую ломаную из L_r можно разбить на три части (ломаную, которая соединяет $(0, 0)$ и (k, r) , горизонтальный отрезок, который соединяет точки (k, r) и $(k+1, r)$, и ломаную, которая соединяет $(k+1, r)$ с $(n-m+k+1, m)$, то общее число ломаных, из которых состоит класс L_r , равно

$$C_{k+r}^r \cdot C_{n-r}^{m-r},$$

а общее число путей из точки $(0, 0)$ в $(n-m+k+1, m)$ равно C_{n+k+1}^m .

г) Рассмотрим все кратчайшие ломаные, которые соединяют точку $(0, 0)$ с точкой $(r, n-r)$. Число всех таких ломаных равно C_n^r . Отнесем к классу B_k те ломаные, которые пересекают прямую $x = \frac{1}{2}$ в точке $(\frac{1}{2}, k)$ ($k=0, \dots, n-1$). Очевидно, класс B_k состоит из C_{n-k-1}^{r-1} ломаных. Поэтому

$$C_n^r = \sum_{k=0}^{n-r} C_{n-k-1}^{r-1}.$$

1.2.29. $C_{n+m}^n - C_{n+m}^d$.

Указание. Рассмотреть симметрию относительно прямой CD .

1.2.30. Какие бы $(m-1)$ членов комиссии не собрались, должен найтись замок, который они не могут открыть, но ключ от этого замка есть у каждого из $(n-m+1)$ других членов комиссии (появление любого из них дает возможность открыть сейф).

Поэтому минимальное число замков равно C_n^{m-1} , а число ключей $(n-m+1)C_n^{m-1}$.

1.2.31. Если не проведена ни одна диагональ, то имеем одну часть. Будем последовательно проводить диагонали. Заметим, что после проведения каждой диагонали число частей увеличится на единицу плюс количество точек пересечения с теми диагоналями, которые проведены. Поэтому число частей, которые образуются после проведения всех диагоналей, равно 1 плюс число точек пересечения, плюс число всех диагоналей. Если никакие три диагонали не пересекаются в одной точке, то число точек пересечения равно C_n^4 (см. задачу 1.2.26). Число диагоналей равно $\frac{n(n-3)}{2}$. Таким образом, число частей равно

$$1 + C_n^4 + \frac{n(n-3)}{2} = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

1.2.34. Пусть $1 \leq k \leq p-1$. Имеем

$$C_p^k = \frac{p(p-1) \dots (p-k+1)}{k!}.$$

Поскольку p — простое число, то p не делится на $k!$. Поэтому $(p-1) \dots (p-k+1)$ делится на $k!$. Следовательно, C_p^k делится на p .

1.2.35. При $a=1$ теорема справедлива. Предположим, что $a^p - a$ делится на p , и докажем, что тогда $(a+1)^p - (a+1)$ делится на p . Действительно,

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + C_p^1 a^{p-1} + C_p^2 a^{p-2} + \dots \\ \dots + C_p^{p-2} a^2 + C_p^{p-1} a$$

делится на p , так как $a^p - a$ делится на p по предположению, а C_p^k ($1 \leq k \leq p-1$) делится на p (задача 1.2.34).

1.2.37. $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n$.

1.2.39. В точку $(k, n-k)$ придет C_n^k лиц.

1.2.40. $C_n^3 - C_m^3$.

1.2.41. Искомое число способов равно числу способов упорядочения множества, которое состоит из 4 элементов, т. е.

$$P_4 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24.$$

1.2.42. Четные числа можно расставить на местах с четными номерами (таких мест n) $n!$ способами; каждому способу расстановки четных чисел на местах с четными номерами соответствует $n!$ способов расстановки нечетных чисел на местах с нечетными номерами. Поэтому, общее число перестановок указанного типа по правилу умножения равно $n! \cdot n! = [n!]^2$.

1.2.43. Определим число перестановок, в которых данные два элемента a и b стоят рядом. Могут быть такие случаи: a стоит на первом месте, a стоит на втором месте, \dots , a стоит на $(n-1)$ месте, а b стоит справа от a ; число таких случаев будет $n-1$. Кроме того, a и b можно поменять местами и, поэтому, существует $2(n-1)$ способов расставить a и b рядом. Каждому из этих способов

соответствует $(n-2)!$ перестановок других элементов. Поэтому число перестановок других элементов, в которых a и b стоят рядом, равно $2(n-1)(n-2)! = 2[(n-1)!]$. Поэтому искомое число перестановок равно $n! - 2(n-1)! = (n-1)!(n-2)$.

1.2.44. При указанном расположении ладей на каждой вертикали и каждой горизонтали стоит только одна ладья. Рассмотрим одно из таких расположений ладей. Пусть a_1 — номер вертикали, в которой стоит ладья первой горизонтали, a_2 — номер вертикали, в которой стоит ладья второй горизонтали, ..., a_8 — номер вертикали, в которой стоит ладья последней горизонтали. Тогда (a_1, \dots, a_8) есть некоторая перестановка чисел $(1, \dots, 8)$. Среди чисел (a_1, \dots, a_8) нет ни одной пары равных, ибо в противном случае две ладьи оказались бы в одной вертикали. Таким образом, каждому расположению ладей соответствует определенная перестановка чисел $1, 2, \dots, 8$. Наоборот, каждой перестановке чисел $1, 2, \dots, 8$ соответствует такое расположение ладей, при котором они не бьют друг друга. Таким образом, число искомых расположений ладей равно

$$P_8 = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 = 40\,320.$$

1.2.45. Искомое число равно числу размещений из 25 по 4:

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

1.2.46. Искомое число способов равно числу 4-элементных упорядоченных подмножеств (дни сдачи экзаменов) множества из восьми элементов, т. е. $A_8^4 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$ способов. Если известно, что последний экзамен будет сдаваться на восьмой день, то число способов равно $4 \cdot A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$.

$$\text{1.2.53. } \frac{10!}{2! \, 3! \, 2!} = 151\,200.$$

$$\text{1.2.54. } \frac{n!}{k_1! \, \dots \, k_m!}$$

1.2.60. а) Обозначим шары (они одинаковы) буквой a . Расположим подряд n букв a . Поставим черту перед первой буквой и после последней. Дальше расставим $N-1$ черту и будем представлять себе урны как промежутки между черточками. Например, символ

$$|aa||a||aaa|$$

обозначает, что 6 шаров размещены в пяти урнах так, что в первой урне есть 2 шара, во второй нет шаров, в третьей — один шар, в четвертой нет шаров, в пятой 3 шара. Такие символы всегда начинаются и оканчиваются чертой, а другие $N-1$ черта и n букв a располагаются произвольно. Распределение шаров полностью определено, если выбраны места для $N-1$ черты. Но из $N-1 + n$ мест можно выбрать $N-1$ место для черт C_{N+n-1}^{N-1} способами.

б) Нужно подсчитать число таких способов размещения $N-1$ черты, при которых каждая черта содержится между двумя буквами. Всего имеется $n-1$ промежутков между буквами и любые $N-1$ из них можно выбрать как места для черт.

1.2.61. а) Пусть n одинаковых шаров размещены в N урнах и x_1 — число шаров в первой урне, \dots , x_N — число шаров в N урне. Тогда

$$x_1 + x_2 + \dots + x_N = n.$$

Наоборот, имея решение (x_1, \dots, x_N) этого уравнения, получим определенный способ размещения n шаров в N урнах (в первой урне x_1 шаров, \dots , в N -й урне x_N шаров). Таким образом, между множеством всех неотрицательных решений уравнения $x_1 + x_2 + \dots + x_N = n$ и множеством всех возможных размещений n одинаковых шаров в N урнах устанавливается взаимно однозначное соответствие. Поэтому число решений равно $C_{N+n-1}^{n-1} = C_{N+n-1}^N$.

б) Положительным решениям уравнения $x_1 + \dots + x_N = n$ соответствуют те размещения n шаров в N урнах, при которых нет ни одной пустой урны. Ответ: C_{n-1}^{N-1} .

1.2.62. C_{N+n-1}^n .

1.2.64. Из трех элементов a, b, c можно образовать такие комбинации по два с повторениями:

$$\begin{array}{l} a a, \quad a c, \quad b c, \\ a b, \quad b b, \quad c c. \end{array}$$

Число различных комбинаций из m элементов по n равно:

$$f_m^n = C_{m+n-1}^{m-1} = C_{m+n-1}^n$$

Действительно, каждая комбинация полностью определяется, если указать сколько элементов каждого из m типов в нее входит. Поставим в соответствие каждой комбинации последовательность из нулей и единиц, образованную по такому правилу: напишем подряд столько единиц, сколько элементов первого типа в комбинации, далее поставим нуль и после этого напишем столько единиц, сколько элементов второго типа содержит эта комбинация и т. д. Например, написанным выше комбинациям из трех по два будут соответствовать такие последовательности:

$$\begin{array}{l} 1 \ 1 \ 0 \ 0, \ 1 \ 0 \ 0 \ 1, \ 0 \ 1 \ 0 \ 1, \\ 1 \ 0 \ 1 \ 0, \ 0 \ 1 \ 1 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1 \ 1, \end{array}$$

Таким образом, каждой комбинации из m по n соответствуют последовательности из n единиц и $m-1$ нулей и, наоборот, по каждой такой последовательности однозначно возобновляется такая комбинация. Поэтому число комбинаций из m по n с повторениями равно числу последовательностей из n единиц и $m-1$ нулей, т. е. равно C_{m+n-1}^{m-1} .

1.2.65. C_{16}^{10} . **1.2.66.** $f_{r+1}^2 = C_{r+2}^r$.

1.2.70. n^k . Указание. Рассмотреть таблицу значений функции.

1.2.71. в) Чтобы доказать в), достаточно доказать, что каждый элемент из $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ учитывается в правой части равенства в) только один раз. Рассмотрим произвольный элемент a из

$A_1 \cup \dots \cup A_n$. Предположим, что a входит ровно в m множеств A_i , тогда элемент a учитывается в правой части в)

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m-1} C_m^m$$

раз. Но

$$C_m^1 - C_m^2 + C_m^3 - \dots + (-1)^{m-1} C_m^m = 1 - [1 - C_m^1 + C_m^2 - \dots + (-1)^m C_m^m] = 1.$$

Таким образом, каждый элемент a из $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ учитывается в правой части равенства 1 раз. Это и доказывает равенство в).

Утверждение задачи можно также доказать методом математической индукции.

1.2.75. Обозначим через A_k совокупность тех перестановок, в которых на k -м месте стоит k . Пусть $D_n = N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)$. Множество $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ содержит те перестановки, в которых на местах i_1, i_2, \dots, i_k стоят числа i_1, i_2, \dots, i_k , а на других местах — другие $(n-k)$ чисел упорядочены произвольно. Поэтому

$$N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n-k)!,$$

а

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = C_n^k (n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Из равенства в) в задаче 1.2.71 следует, что

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = n! \left(\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n!} \right).$$

1.2.81. Пусть A_i — множество тех перестановок, в которых на i -м месте стоит i . Тогда имеем

$$\begin{aligned} N_{[m]}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m) &= C_m^m C_n^m (n-m)! - C_{m+1}^m C_n^{m+1} (n-m+1)! + \dots + (-1)^{n-m} C_n^m C_n^n = \\ &= \frac{n!}{m!} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-m} \frac{1}{(n-m)!} \right]. \end{aligned}$$

1.2.81. См. решение задачи 1.2.82.

1.2.82. К каждой перестановке элементов множества A_r припишем каждую из перестановок элементов множества $A \setminus A_r$. Тогда имеем $i_r! (n-i_r)!$ перестановок элементов множества A . Это же сделаем для всех множеств A_1, \dots, A_k . Получим

$$\sum_{r=1}^k i_r! (n-i_r)!$$

перестановок элементов множества A , причем из условия задачи следует, что все эти перестановки различные. Поэтому

$$\sum_{r=1}^k i_r! (n - i_r)! \leq n!,$$

откуда

$$\sum_{r=1}^k \frac{1}{C_n^{i_r}} \leq 1.$$

Из доказанного следует и утверждение предыдущей задачи (теорема Шпернера). Действительно, поскольку $C_n^{i_r} \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$, то

$$1 \geq \sum_{r=1}^k \frac{1}{C_n^{i_r}} \geq \frac{k}{C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}},$$

откуда $k \leq C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

1.2.83. Утверждение задачи следует из теоремы Шпернера. Поставим в соответствие каждой сумме вида $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k$ подмножество S множества $A = \{1, \dots, n\}$ такое, что $k \in S$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon_k = 1$. Остается теперь только принять во внимание такое обстоятельство: если две суммы $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k$ и $\sum_{k=1}^n \varepsilon'_k x_k$ лежат в интервале длины 2, то ни одно из множеств S и S' не является частью другого.

§ 3

1.3.1. $\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma\text{P}, \text{P}\Gamma, \text{P}\text{P}\}$; $A = \{\Gamma\Gamma, \Gamma\text{P}, \text{P}\Gamma\}$; $B = \{\Gamma\Gamma, \text{P}\Gamma\}$.

1.3.3. $\Omega = \{(i, j); i = \overline{1, 6}, j = \overline{1, 6}\}$;

$A = \{(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)\}$;

$B = \{(i, 6), i = \overline{1, 5}; (6, 6); (6, j), j = \overline{1, 5}\}$.

1.3.5. $\Omega = \{\Gamma, \text{P}\Gamma, \text{P}\text{P}\Gamma, \dots, \text{P}\text{P} \dots \text{P}\Gamma, \dots\}$

1.3.7. $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$.

1.3.12. Ω состоит из всех возможных партий, которые содержат m изделий (число таких партий C_N^m); A состоит из таких партий m изделий, среди которых есть ровно l бракованных (число таких партий $C_n^l C_{N-n}^{m-l}$).

$$\mathbf{P}(A) = \frac{C_n^l C_{N-n}^{m-l}}{C_N^m}.$$

$$\text{I.3.17. а) } \frac{5}{14}; \text{ б) } \frac{5}{14}; \text{ в) } \frac{2}{7}.$$

И.3.36. б) Если $\omega_k \in A \cup B \cup C$, то число p_k учитывается в правой части равенства один раз, если $\bar{\omega}_k \in A \cup B \cup C$, то p_k не учитывается ни разу. Аналогично доказываются утверждения а) и в).

§ 4

И.4.1. Пусть A — событие, которое состоит в том, что среди выбранных цифр нет цифры 0, а B — событие, которое состоит в том, что среди выбранных цифр нет цифры 1. Тогда

$$P(A) = \frac{9^k}{10^k}; \quad P(B) = \frac{9^k}{10^k}; \quad P(A \cap B) = \frac{8^k}{10^k};$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2 \cdot 9^k - 8^k}{10^k}.$$

$$\text{I.4.4. } \frac{6!}{6^6} \approx 0,0154. \quad \text{I.4.5. } \frac{A_{10}^7}{10^7} \approx 0,06.$$

И.4.6. Вероятность того, что при подбрасывании четырех игральных костей ни разу не появится единица, равна $p = \frac{5^4}{6^4}$. Вероятность того, что при 24 подбрасываниях двух игральных костей ни разу не появится пара (1, 1) равна $Q = \left(\frac{34}{36}\right)^{24}$. Принимая во внимание неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx$ при $x > -1$, получим

$$\sqrt[4]{Q} = \left(\frac{35}{36}\right)^6 = \left(1 - \frac{1}{36}\right)^6 > 1 - \frac{1}{6} = \sqrt[4]{p}.$$

откуда $Q > p$, т. е. $1 - Q < 1 - p$.

$$\text{I.4.7. } \frac{12!}{12^{12}} \approx 0,0005.$$

$$\text{I.4.8. } \frac{30!}{2^6 \cdot 6^6} \cdot C_{12}^6 \cdot \frac{1}{2^{30}} \approx 0,00035. \quad \text{I.4.9. } \frac{2(n-r-1)}{n(n-1)}.$$

И.4.10. а) Возможные результаты эксперимента — партии, которые состоят из k шаров, взятых из данных $n+m$ урн. Число их равно C_{m+n}^k . Пусть A_r — событие, которое состоит в том, что среди вынутых k шаров r белых шаров. Результаты эксперимента, которые благоприятствуют A_r , это те партии из k шаров, среди которых есть ровно r белых шаров. Число их равно $C_n^r C_m^{k-r}$. Поэтому

$$P(A_r) = \frac{C_n^r C_m^{k-r}}{C_{n+m}^k}.$$

б) Поскольку одно из событий A_r обязательно произойдет, то

$$P\left(\bigcup_{r=0}^k A_r\right) = 1.$$

$$1.4.12. \sum_{s=1}^r \frac{C_m^s C_{n-m}^{r-s}}{C_n^r}.$$

1.4.14. Вероятность полного выигрыша равна $\frac{1}{C_{49}^6} = 0,72 \times 10^{-7}$,

вероятность угадать i видов спорта равна $\frac{C_6^i C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6}$, вероятность выигрыша

в спортлото равна $\sum_{i=3}^6 \frac{C_6^i C_{43}^{6-i}}{C_{49}^6}.$

$$1.4.15. \text{ а) } \frac{C_2^1 C_{2n-2}^{n-1}}{C_{2n}^n} = \frac{n}{2n-1}; \text{ б) } \frac{2C_2^2 C_{2n-2}^{n-2}}{C_{2n}^n} = \frac{n-1}{2n-1}; \text{ в) } \frac{C_4^2 C_{2n-4}^{n-2}}{C_{2n}^n}.$$

$$1.4.16. \text{ а) } \frac{C_n^k}{C_N^k}, \quad n = \left[\frac{N}{q} \right]; \text{ б) } \frac{C_n^k}{C_N^k}, \quad n = \left[\frac{N}{q_1} \right] + \left[\frac{N}{q_2} \right] - \left[\frac{N}{q_1 q_2} \right];$$

$$\text{ в) } 1 - \frac{C_{N-n}^k}{C_N^k}, \quad n = \left[\frac{N}{q} \right].$$

$$1.4.17. \text{ а) } \frac{n_k}{N^k}, \quad n = \left[\frac{N}{q} \right]; \text{ б) } \frac{n_k}{N^k}, \quad n = \left[\frac{N}{q_1} \right] + \left[\frac{N}{q_2} \right] - \left[\frac{N}{q_1 q_2} \right], \quad 1 - \frac{(N-n)^k}{N^k}, \quad n = \left[\frac{N}{q} \right].$$

$$1.4.18. \text{ а) } \frac{N-k+1}{C_N^k}; \text{ б) } \frac{N-k+1}{A_n^k}; \text{ в) } \frac{C_N^k}{C_N^k k!} = \frac{1}{k!}.$$

$$1.4.19. \text{ а) } \frac{(N-k+1)k!}{N^k}; \text{ б) } \frac{N-k+1}{N^k}; \text{ в) } \frac{A_N^k}{N^k}; \text{ г) } \frac{C_N^k}{N^k}.$$

$$1.4.20. \frac{12!}{2^6 6!^2} \approx 0,003438. \quad 1.4.21. \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_6! 6^n}.$$

1.4.23. а) Возможные результаты эксперимента можно интерпретировать как перестановки чисел $1, 2, \dots, n$. Число их равно $n!$ Пусть A — событие, которое состоит в том, что по крайней мере одно письмо будет получено тем, кому оно предназначено. Событию благоприятствуют те перестановки, в которых по крайней мере одно число стоит на своем месте. Число таких перестановок посчитано при решении задачи 1.2.80 и равно

$$n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \right).$$

Поэтому

$$P(A) = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

Используя разложение для функции e^{-x} в ряд Тейлора, легко увидеть, что

$$P(A) \rightarrow 1 - \frac{1}{e} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

б) Использовать результат задачи 1.2.80.

$$\text{О т в е т. } \frac{1}{m!} \left[\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + (-1)^{n-m} \frac{1}{(n-m)!} \right].$$

$$\text{I.4.25. } \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!}.$$

$$\text{I.4.26. а) } \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_N!} \cdot \frac{1}{N^n}.$$

б) Каждая частица может находиться в одной из N ячеек. Поэтому есть $\underbrace{N \dots N}_{n \text{ раз}} = N^n$ способов размещения n частиц в N ячейках.

Число таких способов размещения, при которых в заданной ячейке есть k частиц, можно подсчитать так: k частиц для данной ячейки можно выбрать C_n^k способами, а другие $(n-k)$ частиц можно распределить в $(N-1)$ ячейках $(N-1)^{n-k}$ способами. Поэтому

$$p_k = C_n^k \frac{(N-1)^{n-k}}{N^n} = C_n^k \frac{1}{N^k} \left(1 - \frac{1}{N} \right)^{n-k}.$$

Для нахождения наиболее вероятного значения k нужно изучить поведение отношения $\frac{p_{k+1}}{p_k}$ при возрастании k от 0 до n . Тогда получим, что наиболее вероятное k находится из неравенств

$$\frac{n-N+1}{N} < k < \frac{n+1}{N}.$$

г) Найдем вероятность того, что будет пустой по крайней мере одна ячейка. Пусть A_1, \dots, A_N — те способы размещения n частиц в N ячейках, при которых пустыми являются первая, вторая, ..., N -я ячейки. Используем результат задачи 1.2.75. Имеем

$$N(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_N) = C_N^1 (N-1)^n - C_N^2 (N-2)^n + \dots + (-1)^{N-2} C_N^{N-1} N^n.$$

Поэтому вероятность того, что все ячейки заняты, равна

$$\frac{N^n - C_N^1 (N-1)^n + C_N^2 (N-2)^n - \dots + (-1)^{N-1} C_N^{N-1} 1^n}{N^n}.$$

д) Используя результат предыдущей задачи, убеждаемся, что среди N^n размещений n частиц в N ячейках есть

$$C_N^r [r^n - C_r^1 (r-1)^n + C_r^2 (r-2)^n - \dots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1} 1^n]$$

таких размещений, при которых занято ровно r ячеек. Поэтому искомая вероятность равна

$$\frac{C_N^r [r^n - C_r^1 (r-1)^n + C_r^2 (r-2)^n - \dots + (-1)^{r-1} C_r^{r-1} 1^n]}{N^n}.$$

1.4.29. а) $\frac{C_9^3 2^6}{3^9}$; б) $\frac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{3^9}$; в) $\frac{C_9^4 C_5^3 C_2^4}{3^9} 3!$

1.4.30. а) $\frac{1}{C_{N+n-1}^n}$. Использовать результат задачи 1.2.63.

б) $\frac{C_N^m \cdot C_{N-m-1}^{n-1}}{C_{N+n-1}^n}$. Использовать результат задачи 1.2.60.

1.4.31. $\frac{1}{C_N^n}$.

1.4.32. Предположим, что покупатели стоят определенным образом в очереди. Пусть e_i равно единице, если i -й покупатель имеет 50 коп. и $e_i = -1$, если i -й покупатель имеет рубль. Рассмотрим сумму $S_k = e_1 + \dots + e_k$, которая является разностью между количеством монет по 50 коп. и количеством рублей, которые даны в кассу первыми k покупателями. Возьмем систему координат XOY , построим в ней точки $A_k = (k, S_k)$, ($k = 1, 2, \dots, m+n$) и рассмотрим ломаную, которая соединяет точку O с точкой $A_{n+m} = (m+n, n-m)$ и проходит через точки $A_1, A_2, \dots, A_{m+n-1}$ (рис. 9). Будем называть ломаную траекторией, которая соответствует данному способу размещения покупателей в очереди. Каждая траектория состоит из $m+n$ отрезков, n из которых поднимаются вверх, а m опускаются вниз. Если указать номера тех отрезков, которые поднимаются вверх, то тем самым траектория будет определена (число способов размещения покупателей в очереди) равно C_{m+n}^n .

Траектории, которые соответствуют тем способам размещения покупателей, при которых ни один из покупателей не ожидает сдачи, не пересекает прямую $y = -1$. Для того, чтобы подсчитать число таких траекторий, поставим в соответствие каждой траектории T , которая пересекается или касается прямой $y = -1$, новую траекторию T' по такому правилу: до первой точки касания с прямой $y = -1$ траектория T' совпадает с T , а дальше T' есть симметрический образ траектории T относительно прямой $y = -1$. (На рис. 9 траектория T' обо-

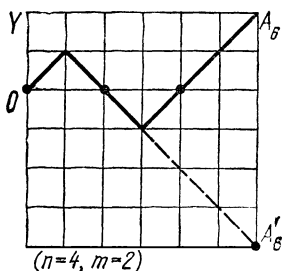


Рис. 9

значена пунктирной линией). Все траектории T' заканчиваются в точке $A'_{m+n} = (m+n, m-n-2)$, которая есть симметрический образ точки A_{m+n} относительно прямой $y = -1$. Установленное соответствие является взаимно однозначным. Поэтому искомое число траекторий равно числу ломаных, которые соединяют 0 с A_{m+n} . Это число легко подсчитать; если такая ломаная состоит из y отрезков, которые идут вниз, и x отрезков, которые идут вверх, то $x+y = m+n$; $y-x = n+2-m$, откуда $y = n+1$. Число траекторий из 0 в A_{m+n} равно C_{m+n}^{n+1} . Число траекторий, которые не пересекают прямую $y = -1$, равно $C_{m+n}^{n+1} - C_{m+n}^n$. Таким образом, вероятность того, что ни одному из покупателей не придется дожидаться сдачи, равна

$$\frac{C_{m+n}^n - C_{m+n}^{n+1}}{C_{m+n}^n} = \frac{n+1-m}{n+1}.$$

Замечания. При решении задач I.4.33—I.4.37 можно использовать геометрические соображения, связанные с подсчетом числа траекторий, аналогичные тем, которые приведены при решении задач 32 и 33. При этом полезно иметь в виду такие утверждения:

Теорема 1. Пусть $N_{x,y}$ — число траекторий из точки 0 в точку (x, y) . Тогда

$$N_{x,y} = \frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)! \left(\frac{x-y}{2}\right)!},$$

если x и y имеют одинаковую четность, и $N_{x,y} = 0$, если x и y числа разной четности.

Действительно, если траектория состоит из p отрезков, которые поднимаются вверх, и q отрезков, которые опускаются вниз, то $p+q = x$; $p-q = y$, откуда $p = \frac{x+y}{2}$; $q = \frac{x-y}{2}$. Поскольку траектория полностью определена, если указаны отрезки, которые поднимаются вверх, то

$$N_{x,y} = C_x^{\frac{x+y}{2}} = \frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)! \left(\frac{x-y}{2}\right)!}$$

Теорема 2. (Принцип зеркального отражения). Пусть $A = (a, \alpha)$, $B = (b, \beta)$ — точки с целочисленными координатами, причем $b > a \geq 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, а $A' = (a, -\alpha)$ — точка, симметричная A относительно оси OX . Тогда число тех траекторий из A в B , которые касаются оси OX либо пересекают ее, равно числу траекторий из A' в B .

Каждой траектории T из A в B , которая пересекает ось OX либо касается ее, поставим в соответствие траекторию из A' в B по такому правилу (рис. 10): берем отрезок траектории T до первого пересечения с осью OX и симметрично отображаем его относительно оси

OX , дальше траектории T' и T совпадают. Таким образом, каждой траектории T из A в B , которая пересекает ось OX , соответствует определенная траектория T' из A' в B . Наоборот, каждой траектории из A' в B соответствует одна и только одна траектория из A в B , которая пересекает ось OX (берем участок траектории из A' в B до первого пересечения с OX и симметрично отображаем относительно OX). Таким образом, между множеством траекторий из A в B , которые пересекают ось OX либо касаются ее, и множеством траекторий из A' в B установлено взаимно однозначное соответствие. Теорема доказана.

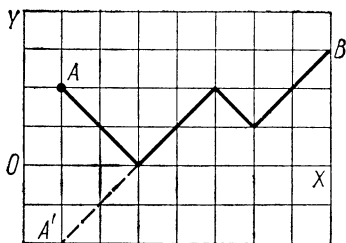


Рис. 10

Теорема 3. Пусть $x > 0, y > 0$. Тогда число траекторий из O в (x, y) , которые не имеют вершин на оси OX (кроме точки O), равно $\frac{y}{x} N_{x, y}$.

Все траектории, которые выходят из O в (x, y) и не пересекают ось OX , проходят через точку $A(1, 1)$ (рис. 11). Общее число траекторий из A в B , которые пересекают ось OX , равно по теореме 2 числу траекторий из A' в B , т. е. $N_{x-y, y+1}$. Таким образом, искомое число траекторий равно

$$N_{x-1, y-1} - N_{x-1, y+1} = \frac{(x-1)!}{\left(\frac{x+y}{2} - 1\right)! \left(\frac{x-y}{2}\right)!} - \frac{(x-1)!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)! \left(\frac{x-y}{2} - 1\right)!} = \frac{y}{x} \frac{x!}{\left(\frac{x+y}{2}\right)! \left(\frac{x-y}{2}\right)!} = \frac{y}{x} N_{x, y}.$$

Установим теперь некоторые свойства траекторий, которые соединяют точку O с точкой $(2n, 0)$ на оси OX .

Пусть

$$L_{2n} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n.$$

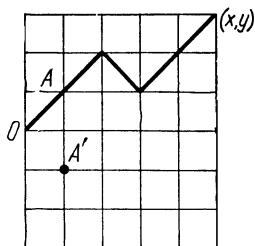


Рис. 11

Теорема 4. Среди C_{2n}^n траекторий, которые соединяют точку O с точкой $(2n, 0)$, существует:

а) ровно L_{2n-2} траекторий, которые лежат выше оси OX и не имеют общих точек с OX , кроме точки O и $(2n, 0)$;

б) ровно L_{2n} траекторий, которые не имеют вершин ниже оси OX .

Все траектории, которые соединяют O с $(2n, 0)$, лежат выше оси OX и не имеют с осью OX общих точек, обязательно проходят

через точку $(2n-1, 0)$. В соответствии с теоремой 3, число траекторий, которые соединяют O с $(2n-1, 1)$ и не пересекают ось OX , равно

$$\frac{1}{2n-1} N_{2n-1, 1} = \frac{1}{2n-1} C_{2n-1}^n = \frac{1}{n} C_{2n-2}^{n-1} = L_{2n-2}.$$

Рассмотрим траекторию, которая соединяет O с $(2n, 0)$ и не имеет общих точек с осью OX . Отбросим первый и последний отрезок этой траектории (рис. 12). Получим траекторию, которая соединяет O_1 с N_1 и не имеет вершин ниже оси OX . Перенесем начало координат в точку O_1 . Тогда число траекторий, которые соединяют O_1 с $(2n-2, 0)$ (точка N_1 теперь имеет координаты $(2n-2, 0)$ и не имеют вершин ниже оси OX , равно L_{2n-2} . Поэтому число траекторий, которые соединяют O с $(2n, 0)$ и не имеют вершин ниже OX , равно L_{2n} .

1.4.33. а) Первый способ. Пусть e_i равно $+1$, если i -й голос отдан за A , $e_i = -1$, если i -й голос отдан за B . Возьмем $S_k = e_1 + \dots + e_k$ и рассмотрим в системе координат XOY (рис. 13) ломаную, которая соединяет точки $O, (1, S_1), \dots, (a+b, S_{a+b})$. Очевидно, что $S_{a+b} = a - b$. Каждому способу отдачи голосов соответствует определенная ломаная (траектория), которая соединяет точки O и $(a+b, a-b)$. Траектория состоит из $a+b$ отрезков, причем a из них идут вверх. Поэтому общее число траекторий равно C_{a+b}^a . Кандидат A всегда будет впереди B , если соответствующая траектория проходит через точку $(1, 1)$ (первый голос должен быть отдан за A) и не пересекает ось OX . Число таких траекторий подсчитано при решении предыдущей задачи; следует лишь положить $n = a-1, m = b$.

Таким образом, искомое число способов подачи голосов равно

$$C_{a+b-1}^{a-1} \frac{a-1+1-b}{a-1+1} = \frac{a-b}{a+b} C_{a+b}^b.$$

Вероятность того, что кандидат A был всегда впереди B равна $\frac{a-b}{a+b}$.

Второй способ. Рассмотрим некоторое фиксированное размещение a символов A и b — символов B на окружности. Определим число тех начальных положений буквы A , при подсчете из которых (например, по часовой стрелке) число букв A всегда будет не меньше,

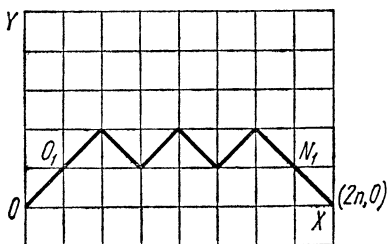


Рис. 12

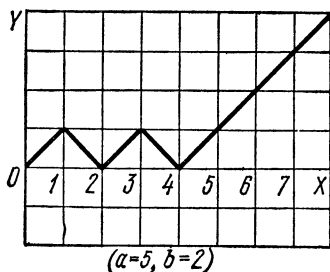


Рис. 13

чем число букв B . Чтобы найти эти положения, вычеркнем последовательно все соседние пары. Возможно, для этого придется обойти окружность несколько раз. В результате останется $a - b$ символов A , они, очевидно, и являются искомыми начальными положениями.

Таким образом, искомая вероятность равна $\frac{a-b}{a+b}$.

б) Задача сводится к подсчету числа траекторий из точки O в точку $(m+n, n-m)$, которые не пересекают прямую $y = -(p+1)$. По теореме 2 число тех траекторий, которые пересекают эту прямую, равно числу траекторий из точки $(0, -2(p+1))$ в точку $(n+m, n-m)$, т. е. $C_{m+n}^{p+n+1} = C_{m+n}^{m-p-1}$. Искомое число траекторий равно

$$C_{m+n}^n - C_{m+n}^{m-p-1},$$

вероятность того, что каждый покупатель не будет ожидать очереди,

равна $\frac{C_{m+n}^m - C_{m+n}^{m-p-1}}{C_{m+n}^m}$.

$$1.4.36. \frac{1}{n+1}. \quad 1.4.37. \frac{2^n}{C_{2n}^n}.$$

§ 5

$$1.5.1. 1 - (1-k)^2. \quad 1.5.3. \frac{(a-d)^2}{a^2}.$$

1.5.5. $\Omega = \{(x, y, z): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq a, 0 \leq z \leq a\}; A = \{(x, y, z): x+y > z, x+z > y, y+z > x\}; P(A) = \frac{1}{2}$.

$$1.5.7. \frac{6}{19}. \quad 1.5.11. \frac{1}{4}. \quad 1.5.13. \frac{2}{3}. \quad 1.5.14. \left(1 - \frac{r^3}{R^3}\right)^N.$$

1.5.15. а) Пусть x — расстояние от середины иглы до ближайшей параллели, y — угол, который образует игла с этой параллелью. Тогда $\Omega = \{(x, y): 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \pi\}$;

$$A = \{(x, y): x \leq l \sin y\}$$

и поэтому

$$P(A) = \frac{\int_0^\pi l \sin \varphi d\varphi}{a\pi} = \frac{2l}{a\pi}.$$

1.5.16. Представим себе, что цилиндр вписан в сферу, центр которой совпадает с центром масс монеты. На поверхности сферы наудачу выбирается точка. Если радиус, проведенный из центра в эту точку, пересекает боковую поверхность цилиндра, то будем считать, что монета упала ребром (рис. 14).

Используя то обстоятельство, что площадь сферического пояса равна произведению высоты пояса на длину большого круга, получим, что толщина монеты должна составлять $\frac{2}{3}$ радиуса сферы. Если

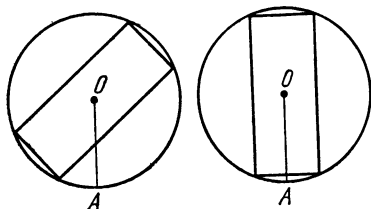


Рис. 14

радиус монеты r , а радиус сферы R , то по теореме Пифагора $R^2 = \frac{1}{9} R^2 + r^2$, откуда $\frac{1}{3} R = \frac{\sqrt{2}}{4} r \approx 0,354r$, т. е. толщина монеты должна составлять $\frac{\sqrt{2}}{4} \approx 0,354$ ее диаметра.

§ 6

I.6.6. а) $1 - P(A \cap B)$;

I.6.10. $P_0 = -P(A) - P(B) + P(A \cap B)$;

$$p_1 = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B); p_2 = P(A \cap B).$$

I.6.12. $P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \geq 0,8 + 0,8 - 1 = 0,6$, поскольку $P(A \cup B) \leq 1$.

I.6.14. Использовать метод математической индукции и неравенство

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cup A_2) \geq P(A_1) + P(A_2) - 1.$$

I.6.16. Пусть $P(A) \geq P(B)$. Поскольку $P(A \cap B) \leq P(B)$, то $P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq P(B)[1 - P(A)] \leq P(A)[1 - P(A)] \leq \frac{1}{4}$.

Положим $x = P(A \cap B)$, $a = P(A \cap \bar{B})$, $b = P(\bar{A} \cap B)$. Тогда

$$\begin{aligned} P(A \cap B) - P(A)P(B) &= x - (a + x)(b + x) = \\ &= x - [ab + x(a + b + x)] \geq x - ab - x = -ab \geq -\frac{1}{4}, \end{aligned}$$

так как

$$a \leq P(A), \quad b \leq P(\bar{A}), \quad ab \leq P(A)[1 - P(A)] \leq \frac{1}{4}.$$

I.6.18. Заметим, что

$$P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B) + P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1.$$

Положим

$$P(A \cap B) = x + \frac{1}{4}, \quad P(A \cap \bar{B}) = y + \frac{1}{4},$$

$$P(\bar{A} \cap B) = z + \frac{1}{4}, \quad P(\bar{A} \cap \bar{B}) = w + \frac{1}{4}.$$

Тогда

$$x + y + z + w = 0.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(w + \frac{1}{4}\right)^2 &= \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + w^2 + \frac{x + y + z + w}{2} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x = y = z = w = 0$.

1.6.21. Необходимость. Неравенства имеют место, ибо левые части этих неравенств есть вероятности случайных событий $\bar{A} \cap \bar{B}$, $A \cap \bar{B}$, $\bar{A} \cap B$, $A \cap B$.

Достаточность. Из неравенств, которые предполагаются выполненными, следует, что

$$0 \leq p_{12} \leq p_1 \leq p_1 + p_2 - p_{12} \leq 1,$$

$$0 \leq p_{12} \leq p_2 \leq p_1 + p_2 - p_{12} \leq 1.$$

Пусть $\Omega = [0, 1]$, а \mathfrak{M} — есть σ -алгебра измеримых множеств, $P(\cdot)$ — мера Лебега. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathfrak{M}, P)$. Пусть $A = (0, p_1)$, $B = (p_1 - p_{12}, p_1 + p_2 - p_{12})$. Тогда $P(A) = p_1$, $P(B) = p_2$, $P(A \cap B) = p_{12}$.

1.6.24. Алгебра \mathfrak{M} состоит из 2^{2^n} событий, каждое из которых есть сумма некоторого числа попарно несовместных «основных» событий вида

$$\gamma = A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap \bar{A}_{j_1} \cap \dots \cap \bar{A}_{j_{n-k}}.$$

Число «основных» событий равно, очевидно, 2^n .

1.6.25. Поскольку каждое событие B_k из алгебры \mathfrak{M} является суммой некоторого числа попарно несовместных «основных» событий (см. I. 24), то неравенство

$$\sum_{k=1}^m C_k P(B_k) \geq 0 \quad (1)$$

равносильно неравенству

$$\sum_{k=1}^m C_k P(B_k) = \sum_{\gamma} \lambda_{\gamma} P(\gamma) \geq 0, \quad (2)$$

где в сумме (2) перечисляются все 2^n «основных» событий и

$$\lambda_{\gamma} = \sum_{\gamma \in B_k} C_k. \quad (3)$$

В сумме (3) перечисляются все те k , для которых «основное» событие γ входит в представление B_k . Заметим, что коэффициенты λ_{γ} в (2) зависят только от чисел C_k и функциональной зависимости событий B_k от событий A_i и не зависят от числового значения вероятностей $P(A_i)$. Если каждое из чисел $P(A_i)$ ($i = \overline{1, n}$) равно нулю либо единице (и есть по крайней мере одно, которое является 1), то одно и только одно из «основных» событий имеет вероятность 1, а вероятности всех остальных равны нулю. Поэтому утверждение $\lambda_{\gamma} \geq 0$ для всех «основных» событий γ равносильно утверждению: неравенство (2) выполняется для всех наборов событий $\{A_i\}$, у которых $P(A_i)$ равно нулю либо единице.

1.6.27. В соответствии с утверждением задачи 1.6.26, достаточно проверить справедливость равенства для произвольной группы событий $\{A_i\}$, каждое из которых имеет вероятность 0 либо 1. Пусть среди A_1, \dots, A_n ровно l событий имеют вероятность 1. Тогда нужно проверить равенство

$$\sum_{k=0}^{n-r} (-1)^k C_{r+k}^k C_l^{r+k} = \begin{cases} 1, & \text{если } l = r, \\ 0, & \text{если } l \neq r. \end{cases}$$

Если $l < r$, то все члены в левой части равенства равны нулю, если $l = r$, то левая часть равенства равна 1; если $l > r$, то левую часть равенства можно привести к виду

$$C_l^r (l-1)^{l-r} = 0 \quad (l > r)$$

1.6.29. Используем утверждение задачи 1.6.25. Если среди событий A_1, \dots, A_n ровно l имеют вероятность 1, а вероятности других равны 0, то вопрос сводится к проверке очевидного неравенства

$$\frac{C_l^{r+1}}{C_n^{r+1}} \leq \frac{C_l^r}{C_n^r}.$$

§ 7

1.7.1. $\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma\text{Р}, \text{Р}\Gamma, \text{РР}\}; \quad A = \{\Gamma\Gamma, \Gamma\text{Р}\}; \quad B = \{\Gamma\Gamma, \text{Р}\Gamma\};$
 $\text{Р}(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \text{Р}(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \text{Р}(A \cap B) = \frac{1}{4}.$

1.7.2. $\{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma\text{Р}, \Gamma\text{Р}\Gamma, \Gamma\text{РР}, \text{Р}\Gamma\Gamma, \text{Р}\Gamma\text{Р}, \text{РР}\Gamma, \text{РРР}\}; \quad A = \{\Gamma\Gamma\text{Р}, \Gamma\text{Р}\Gamma, \text{Р}\Gamma\Gamma\}; \quad B = \{\Gamma\Gamma\Gamma, \Gamma\Gamma\text{Р}, \Gamma\text{Р}\Gamma, \Gamma\text{РР}, \text{Р}\Gamma\Gamma, \text{Р}\Gamma\text{Р}, \text{РР}\Gamma\}; \quad A \cap B = \{\Gamma\text{Р}\Gamma, \text{Р}\Gamma\Gamma\};$
 $\text{Р}(A) = \frac{3}{8}; \quad \text{Р}(B) = \frac{7}{8}; \quad \text{Р}(A \cap B) = \frac{3}{8};$
 $\text{Р}(A/B) = \frac{3}{7}.$

1.7.3. Пространство элементарных событий имеет вид $\Omega = \{\text{ММ}, \text{МД}, \text{ДМ}, \text{ДД}\}$. $A = \{\text{ММ}\}$ — событие, которое состоит в том, что в семье два мальчика; $B = \{\text{ММ}, \text{МД}, \text{ДМ}\}$ — событие, которое состоит в том, что в семье есть по крайней мере один мальчик; $C = \{\text{ММ}, \text{МД}\}$ — событие, которое состоит в том, что старший ребенок — мальчик. Имеем

$$\text{Р}(A/B) = \frac{1}{3}; \quad \text{Р}(A/C) = \frac{1}{2}.$$

$$1.7.5. \quad 1 - \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{2}. \quad 1.7.6. \quad 1 - \frac{10 \cdot 5^9}{6^{10} - 5^{10}} \approx 0,61.$$

1.7.7. Рассмотрим случайные события: A — выбранное лицо — мужчина; B — выбранное лицо — женщина; C — выбранное лицо — дальтоник. Тогда

$$\text{Р}(A/C) = \frac{\text{Р}(A \cap C)}{\text{Р}(C)} = \frac{\text{Р}(A \cap C)}{\text{Р}(C \cap A) + \text{Р}(C \cap B)} = \frac{0,05}{0,05 + 0,0025} = \frac{20}{21}.$$

1.7.10. $\frac{21}{46}$.

1.7.11. Имеем $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \leq \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{p}{1-\varepsilon}$. С другой стороны, используя неравенство

$$P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1,$$

получим $P(A/B) \geq \frac{p-\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

1.7.14. $\Omega = \{\text{ММ, МД, ДМ, ДД}\}$; $A = \{\text{МД, ДМ}\}$; $B = \{\text{ММ, МД, ДМ}\}$; $A \cap B = \{\text{ММ}\}$; $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{3}{4}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$; $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

1.7.27. Если события A , B и C независимы, то события \tilde{A} , \tilde{B} и \tilde{C} , где \tilde{A} , \tilde{B} и \tilde{C} совпадают соответственно с A либо \bar{A} , B либо \bar{B} , C либо \bar{C} , являются независимыми. Аналогичное утверждение справедливо для произвольной совокупности независимых событий. Легко видеть, что для доказательства этого утверждения достаточно установить независимость A и \bar{B} , если A и B — независимые события. Но это следует из равенств:

$$\begin{aligned} P(A \cap \bar{B}) &= P(A/A \cap B) = P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = \\ &= P(A)[1 - P(B)] = P(A)P(\bar{B}). \end{aligned}$$

Таким образом, для независимых событий A , B и C являются независимыми A , \bar{B} , \bar{C} и, поэтому

$$\begin{aligned} P\{A \cap (B \cup C)\} &= P\{A \cap A \cap (\bar{B} \cup \bar{C})\} = P(A) - P(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) = \\ &= P(A) - P(A)P(\bar{B})P(\bar{C}) = P(A)[1 - P(\bar{B} \cap \bar{C})] = \\ &= P(A)[1 - P(\overline{B \cup C})] = P(A)P(B \cup C). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} P\{A \cap (B/C)\} &= P(A \cap B \cap \bar{C}) = P(A)P(B)P(\bar{C}) = \\ &= P(A)P(B \cap \bar{C}) = P(A)P(B/C). \end{aligned}$$

Заметим, что в этом случае недостаточно попарной независимости событий A , B , C .

1.7.28. Утверждение следует из равенств.

$$\begin{aligned} P\{A \cap (B \setminus C)\} &= P\{A \cap B \cap \bar{C}\} = P\{(A \cap B) \setminus (A \cap B \cap C)\} = \\ &= P(A \cap B) - P(A \cap B \cap C) = P(A \cap B) - P(A \cap C) = \\ &= P(A)[P(B) - P(C)] = P(A)P(B \setminus C) \end{aligned}$$

в случае, когда $B \supset C$, и равенств

$$\begin{aligned} P\{A \cap (B \cup C)\} &= P(A)P(B) + P(A)P(C) = \\ &= P(A)[P(B) + P(C)] = P(A)P(B \cup C), \end{aligned}$$

когда $B \cap C = \emptyset$.

1.7.29. Каждое из событий A и B есть либо Ω , либо \emptyset .

1.7.30. Из предыдущей задачи следует, что события A и $B_1 \cup B_2$ — независимы, и по индукции получаем независимость A и $\bigcup_{k=1}^n B_k$ при каждом n , т. е.

$$P\{A \cap (\bigcup_{k=1}^n B_k)\} = P(A) \cdot P(\bigcup_{k=1}^n B_k).$$

Последовательности событий $\{A \cap (\bigcup_{k=1}^n B_k), n \geq 1\}$, $\{\bigcup_{k=1}^n B_k, n \geq 1\}$ монотонны:

$$A \cap (\bigcup_{k=1}^n B_k) \subset A \cap (\bigcup_{k=1}^{n+1} B_k), \quad \bigcup_{k=1}^n B_k \subset \bigcup_{k=1}^{n+1} B_k, \quad n \geq 1.$$

Поэтому, по теореме о непрерывности вероятности можно в полученном равенстве перейти к пределу при $n \rightarrow \infty$.

$$\text{1.7.31. а) } P(\overline{A_1} \cap \dots \cap \overline{A_n}) = \prod_{k=1}^n P(\overline{A_k}) = \prod_{k=1}^n [1 - P(A_k)];$$

$$\text{б) } P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = 1 - P(\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k}) = 1 - P(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}) = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - p_k);$$

$$\text{в) } \prod_{k=1}^n (1 - p_k) \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{1 - p_k}, \text{ если } p_k < 1.$$

$$\text{1.7.32. } 1 - (1 - p)^n.$$

$$\text{1.7.33. } P(A) = 1 - (1 - p)^{mn}; \quad P(B) = [1 - (1 - p)^n]^m.$$

$$\text{1.7.35. а) } 1 - (1 - p_1 p)^{n-1}; \quad \text{б) } 1 - (1 - p_1 p)^{n-2}.$$

$$\text{1.7.36. } 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n \geq \frac{1}{2} \text{ при } n \geq 25.$$

$$\text{1.7.39. а) } A = A_1 \cup A_2, \quad P(A) = 1 - P(\overline{A} \cap \overline{A_2}) = 1 - (1 - p_1)(1 - p_2);$$

$$\text{б) } A = A_1 \cap A_2, \quad P(A) = p_1 p_2;$$

$$\text{в) } A = \bigcap_{i=1}^n A_i; \quad P(A) = \prod_{i=1}^n p_i;$$

$$\text{г) } A = \bigcup_{i=1}^n A_i, \quad P(A) = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i),$$

$$A = A_1 \cap (A_2 \cup A_3 \cup A_4) \cap A_5;$$

$$\text{1.7.40. } p^n. \quad \text{1.7.41. б) } 1 - (1 - p)(1 - p p_1).$$

$$\text{1.7.42. а) } 1 - (1 - p)^n;$$

$$\text{б) } 1 - (1 - p)(1 - p_1 p)^{n-1}.$$

1.7.44. Надежность системы, дублированной способом а), равна $P_a = [1 - (1 - p)^2]^n$; способом б) — равна $P_6 = 1 - (1 - p^n)^2$. Докажем, что при $0 < p < 1$ выполняется неравенство $P_a > P_6$. Поскольку

$$P_a = [1 - (1 - p)^2]^n = p^n (2 - p)^n;$$

$$P_6 = 1 - (1 - p^n)^2 = p^n (2 - p^n),$$

то достаточно доказать неравенство $(2 - p)^n > 2 - p^n$. Положим в этом неравенстве $p = 1 - q$. Тогда имеем

$$(1 + q)^n + (1 - q)^n > 2. \quad (1)$$

Для доказательства неравенства (1) заметим, что функция $y = x^n$ выпукла вниз. Поэтому при любых x_1 и x_2 ($x_1 \neq x_2$)

$$\frac{x_1^n + x_2^n}{2} > \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \right)^n. \quad (2)$$

Положив в неравенстве (2) $x_1 = 1 + q$, $x_2 = 1 - q$ получим (1).

$$1.7.45. \quad 1) \sum_{n=0}^{\infty} (2\alpha\beta)^n \alpha^2 = \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha\beta};$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} (2\alpha\beta)^n \beta^2 = \frac{\beta^2}{1 - 2\alpha\beta};$$

$$3) \alpha - \frac{\alpha^2}{1 - 2\alpha\beta} = \frac{\alpha\beta(\beta - \alpha)}{1 - 2\alpha\beta} < 0 \quad (\text{если } \alpha > \beta, \text{ то выгоднее играть всю игру});$$

4) 0.

1.7.47. Вероятность того, что выиграет А, равна

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} [(1 - p_1)(1 - p_2)]^n p_1 = \frac{p_1}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)};$$

вероятность выигрыша В есть

$$P(B) = (1 - p_1) \frac{p_2}{1 - (1 - p_1)(1 - p_2)}.$$

Вероятность того, что игра будет длиться бесконечно долго, равна

$$1 - P(A) - P(B) = 0.$$

1.7.50. Пусть А — событие, которое состоит в том, что первый возьмет «счастливый» билет, В — событие, которое состоит в том, что второй возьмет счастливый билет. Очевидно, $P(A) = \frac{n}{N}$. Вероятность $P(B)$ подсчитаем по формуле полной вероятности. Возможны два случая: H_1 — первый взял «счастливый» билет ($P(H_1) = \frac{n}{N}$),

H_2 — первый взял «несчастливый» билет $\left(P(H_2) = \frac{N-n}{N} \right)$. По формуле полной вероятности

$$P(B) = P(H_1) P(B/H_1) + P(H_2) P(B/H_2) = \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1} + \\ + \frac{N-n}{N} \frac{n}{N-1} = \frac{n}{N}.$$

1.7.52. Рассмотрим случайное событие A — взял белый шар, H_i — выбрана урна с номером i ($i = \overline{1, N}$). Тогда H_1, \dots, H_N — полная группа событий, $P(H_i) = \frac{1}{N}$ и по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^N P(H_i) P(A/H_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{n_i}.$$

1.7.54. Событие A — появление белого шара из второй урны. Могут быть два предположения: H_1 — переложили белый шар; H_2 — переложили не белый шар. Очевидно,

$$P(H_1) = \frac{m_1}{n_1}, \quad P(H_2) = \frac{n_1 - m_1}{n_1} = 1 - \frac{m_1}{n_1}.$$

События H_1, H_2 образуют полную группу событий и по формуле полной вероятности

$$P(A) = P(H_1) P(A/H_1) + P(H_2) P(A/H_2) = \frac{m_1}{n_1} \frac{m_1 + 1}{n_1 + 1} + \\ + \left(1 - \frac{m_1}{n_1} \right) \frac{m_1}{n_1 + 1}.$$

1.7.55. $\frac{2}{3}.$

1.7.56. Вероятность того, что объект будет обнаружен за один цикл осмотра, равна

$$pp_1 + (1-p)p_0;$$

вероятность обнаружения объекта по крайней мере один раз за n циклов осмотра равна

$$1 - [1 - pp_1 - (1-p)p_0]^n.$$

1.7.58. а) Вероятность того, что в семье k мальчиков, равна

$$\sum_{n=k}^{\infty} \alpha p^n C_n^k \frac{1}{2^n}.$$

Далее использовать равенство

$$\sum_{n=k}^{\infty} C_n^k s^n = \frac{s^k}{(1-s)^{k+1}};$$

б) $\frac{p}{1-p}$.

1.7.62. Рассмотрим случайные события: H_i — в урне i белых шаров ($i = 0, 1, \dots, n$); B — из урны взяли белый шар. По условию задачи $P(H_i) = \frac{1}{n+1}$.

Используя формулы Байеса, получим

$$\begin{aligned} P(H_i/B) &= \frac{P(H_i) P(B/H_i)}{\sum_{k=1}^n P(H_k) P(B/H_k)} = \frac{\frac{1}{n+1} \frac{i}{n}}{\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n}} = \\ &= \frac{2i}{n(n+1)} \quad (i = 0, 1, \dots, n). \end{aligned}$$

Наиболее вероятной есть гипотеза H_n :

$$P(H_n) = \frac{2}{n+1}.$$

1.7.65. Пусть D — случайное событие, которое состоит в том, что при трех выстрелах есть два попадания. Тогда

$$\begin{aligned} P(C/D) &= \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{p_3 p_2 (1-p_1) + p_3 p_1 (1-p_2)}{p_1 p_2 (1-p_3) + p_1 (1-p_2) p_3 + (1-p_1) p_2 p_3} = \\ &= \frac{10}{19} > \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$1.7.71. \quad \frac{\frac{n}{1+n} p_2}{\frac{1}{1+n} p_1 + \frac{n}{n+1} p_2} = \frac{n p_2}{p_1 + n p_2}.$$

1.7.72. Пусть z — число белых шаров в первой урне, x — число белых, а y — число черных шаров во второй урне. Вероятность того, что при извлечении шаров из первой урны все n шаров будут белыми, равна $\left(\frac{z}{x+y}\right)^n$. Вероятность того, что при извлечении n шаров из второй урны все n шаров будут белыми либо все n шаров будут черными, равна $\left(\frac{x}{x+y}\right)^n + \left(\frac{y}{x+y}\right)^n$. Поэтому

$$\left(\frac{z}{x+y}\right)^n = \left(\frac{x}{x+y}\right)^n + \left(\frac{y}{x+y}\right)^n,$$

откуда $x^n + y^n = z^n$. Таким образом, поставленная задача равносильна великой проблеме Ферма.

1.7.74. Обозначим через x и y вероятности того, что a последовательных «успехов» произойдет раньше, чем b последовательных «неудач» при условии, что результатом первого эксперимента есть «успех» и «неудача» соответственно. Очевидно, нужная вероятность равна $px + qy$. Рассмотрим сначала случай, когда первый эксперимент дал «успех». В этом случае событие, которое нас интересует, можно получить такими несовместными a способами: 1) получить $a - 1$ «успех» в последовательных $a - 1$ экспериментах после первого; 2) получить после $r - 2$ ($2 \leq r \leq a$) «успехов» в r -м эксперименте «неудачу» и после этого нужное событие. Поэтому по формуле полной вероятности имеем:

$$\begin{aligned} x &= p^{a-1} + p^{a-2}qy + p^{a-3}qy + \dots + qy = \\ &= p^{a-1} + p \frac{1 - p^{a-1}}{1 - p} y = p^{a-1} + (1 - p^{a-1}) y. \end{aligned}$$

Аналогично получаем

$$y = x(1 - q^{b-1}).$$

Отсюда

$$px + qy = \frac{p^{a-1}(1 - q^b)}{p^{a-1} + q^{b-1} - p^{a-1}q^{b-1}}.$$

1.7.75. а) $\frac{43}{216}$; б) $\frac{5}{54}$.

1.7.76. Вероятность того, что будет v попаданий при выстрелах с номерами n_1, n_2, \dots, n_v , равна

$$\prod_{i=1}^v \frac{3}{4n_i^2} \prod_{n \neq n_1, n_2, \dots} \left(1 - \frac{3}{4n^2}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{4n^2}\right) \prod_{i=1}^v \frac{\frac{3}{4n_i^2}}{1 - \frac{3}{4n_i^2}}.$$

Вероятность того, что крейсер не потонет при v попаданиях и выстрелах с номерами n_1, \dots, n_v , равна

$$\frac{1}{4^v} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{4n^2}\right) \prod_{i=1}^v \frac{\frac{3}{4n_i^2}}{1 - \frac{3}{4n_i^2}} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{4n^2}\right) \prod_{i=1}^v \frac{\frac{3}{16n_i^2}}{1 - \frac{3}{4n_i^2}}.$$

Искомая вероятность равна

$$\sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n_1, \dots, n_v} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{4n^2}\right) \prod_{i=1}^v \frac{\frac{3}{16n_i^2}}{1 - \frac{3}{4n_i^2}} =$$

$$\begin{aligned}
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{4n^2}\right) \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{n_1, \dots, n_v} \prod_{i=1}^v \frac{\frac{3}{16n_i^2}}{1 - \frac{3}{4n_i^2}} = \\
&= \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{3}{4n^2}\right) \prod \left(1 + \frac{\frac{3}{16n^2}}{1 - \frac{3}{4n^2}}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{9}{16n^2}\right) = \\
&= \frac{\sin \frac{3\pi}{4}}{3\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi}.
\end{aligned}$$

Глава II

§ 1

II.1.1. $\Omega = \{\Gamma\Gamma, \Gamma P, P\Gamma, PP\}$;

$$M\xi = \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 = 1; \quad M\xi^2 = 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2};$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{1}{2}.$$

II.1.3. $\Omega = \{\omega_1 = \Gamma, \omega_2 = P\Gamma, \dots, \omega_n = P, P, \dots, P, \Gamma, \dots\}$;

$$\xi(\omega_n) = n; \quad P\{\xi(\omega_n) = n\} = \frac{1}{2^n}; \quad P\{\xi > 1\} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2}.$$

$$II.1.6. \quad M\xi = 0; \quad D\xi = \frac{n(n+1)}{3}.$$

II.1.7. $M\xi^n = 1$ (n — четное); $M\xi^n = 0$ (n — нечетное).

II.1.16. Совместное распределение задается матрицей 6×6 .

Главная диагональ состоит из элементов $q, 2q, \dots, 6q$, где $q = \frac{1}{36}$.

По одну сторону от диагонали все элементы равны нулю, по другую — q . $M\xi = \frac{7}{2}$; $D\xi = \frac{35}{12}$; $M\eta = \frac{161}{36}$; $D\eta = \frac{2555}{1296}$; $\text{cov}(\xi, \eta) = \frac{105}{72}$.

II.1.22. Пусть $P\{\xi = x_i\} = p_i$; $P\{\eta = y_i\} = q_i$; $P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij}$. В соответствии с условием задачи

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \delta_{ij} x_i^h y_j^k = 0 \quad (h = \overline{0, m-1}, k = \overline{0, n-1}),$$

где $\delta_{ij} = p_{ij} - p_i q_j$. Положим

$$\alpha_{ik} = \sum_{j=1}^n \delta_{ij} y_j^k.$$

Тогда для неизвестных α_{ik} ($i = \overline{1, m}$) имеем систему линейных однородных уравнений

$$\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} x_i^h = 0 \quad (h = \overline{0, m-1}).$$

Определителем этой системы есть так называемый определитель Вандермонда, который не равен нулю. Поэтому

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} y_j^k = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

Поскольку последнее равенство справедливо для каждого k , имеем снова систему линейных однородных уравнений относительно δ_{ij} :

$$\sum_{j=1}^n \delta_{ij} y_j^k = 0 \quad (k = \overline{0, n-1}),$$

откуда $\delta_{ij} = 0$, т. е. $p_{ij} = p_i q_j$.

II.1.23. Пусть

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-е письмо получено адресатом;} \\ 0, & \text{— в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\xi_n = \eta_1 + \dots + \eta_n$. Поскольку $P\{\eta_k = 1\} = \frac{1}{n}$, то $M\eta_k = \frac{1}{n}$, $D\eta_k = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-1}{n^2}$ и $M\xi_n = \sum_{k=1}^n M\eta_k = 1$. Для вычисления $D\xi_n$ нужно подсчитать $M\eta_k \eta_l$ ($k \neq l$). Поскольку $\eta_k \eta_l$ принимает лишь значения 1 и 0, причем $P\{\eta_k \eta_l = 1\} = \frac{1}{n(n-1)}$, то

$$M\eta_k \eta_l = \frac{1}{n(n-1)};$$

$$\text{cov}(\eta_k, \eta_l) = M\eta_k \eta_l - M\eta_k M\eta_l = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}.$$

Таким образом,

$$D\xi_n = \sum_{k=1}^n D\eta_k + 2 \sum_{k < l} \text{cov}(\eta_k, \eta_l) = \frac{n-1}{n} + 2C_n^2 \frac{1}{n^2} \frac{1}{n-1} = 1.$$

$$\text{II.1.26. } P\{\xi + \eta = k\} = \begin{cases} \frac{k+1}{(n+1)^2}, & k = 0, 1, \dots, n; \\ \frac{2n+1-k}{(n+1)^2}, & k = n+1, \dots, 2n. \end{cases}$$

II.1.28. $n = 18$; $p = \frac{2}{3}$. Рассмотрим последовательность независимых случайных величин η_1, \dots, η_n , где

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & \text{если в } k\text{-м испытании — «успех»,} \\ 0, & \text{если в } k\text{-м испытании — «неудача».} \end{cases}$$

Тогда

$$M\eta_k = 1 \cdot p_k + 0 \cdot q_k = p_k; \quad D\eta_k = p_k - p_k^2 = p_k q_k.$$

Поскольку

$$\xi_n = \eta_1 + \dots + \eta_n,$$

то

$$M\xi_n = \sum_{k=1}^n p_k, \quad D\xi_n = \sum_{k=1}^n p_k q_k.$$

$$\text{II.1.32. } C_5^2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^3.$$

II.1.34. а) $m_0 = 2$; $m_0 = 3$; $p_{14}(2) = p_{14}(3) \approx 0,25$; б) $P\{\xi \geq 4\} \approx 0,302$.

II.1.35. а) 0,665; б) 0,618; в) 0,597. Вероятность того, что при подбрасывании $6n$ игральных костей не менее n раз появится шестерка, равна

$$1 - \sum_{k=0}^{n-1} C_{6n}^k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{6n-k}.$$

$$\text{II.1.37. а) } 1 - (0,8)^{10} - 2 \cdot 0,8^9 \approx 0,6242;$$

$$\text{б) } \frac{1 - (0,8)^{10} - 2 \cdot (0,8)^9}{1 - (0,8)^{10}} \approx 0,6993.$$

$$\text{II.1.38. } \sum_{k=0}^n [C_n^k]^2 \frac{1}{2^{2n}} = C_{2n}^{2n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \text{ при больших } n. \text{ (Использовать формулу Стирлинга).}$$

II.1.39. а) Если взята пустая коробка, а вторая содержит r спичек, то спички брали $2N - r$ раз, причем N раз из коробки, которая оказалась потом пустой. Если считать, что коробки выбираются независимо, то будем иметь дело с $2N - r$ последовательными независимыми испытаниями, в каждом из которых появление коробки, которая оказалась потом пустой, имеет вероятность $1/2$. Таким образом, искомая вероятность равна вероятности появления N «успехов» в схеме Бернулли:

$$C_{2N-r}^N \cdot \frac{1}{2^{2N-r}};$$

$$\text{б) } x_r = C_{2N-1-r}^{N-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-r-1};$$

$$\text{в) } \sum_{r=1}^N x_r 2^{-r-1} = \frac{1}{2^{2N}} \sum_{r=1}^N C_{2N-1-r}^{N-1}.$$

$$\text{II.1.40. } C_5^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{40}{128} > C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-4} = \frac{35}{128}.$$

$$\text{II.1.41. } \frac{1}{n}.$$

$$\text{II.1.43. } M\gamma = 2npq; D\gamma = 2npq(1 - 2pq) + 2(n-1)pq(p-q)^2.$$

$$\text{II.1.44. } \frac{1}{2^n} (C_n^0 + C_n^r + \dots + C_n^{2r} + \dots) = \frac{1}{r} \sum_{k=0}^{r-1} \cos \frac{nk\pi}{r} \cos^n \frac{k\pi}{r}.$$

$$\text{II.1.49. } P\{\eta = i\} = 2q^i p - q^{2i} p - q^{2i+1} p;$$

$$P\{\eta = i, \xi = j\} = q^{i+j} p^2, \quad i > j, \quad P\{\eta = i, \xi = i\} = (1 - q^{i+1}) q^i p.$$

II.1.50. Если $\xi = n$, то должны произойти одновременно два события: а) при $(n+1)$ испытаниях будет «успех»; вероятность этого p ;

б) в предыдущих n испытаниях будет ровно $r-1$ «успехов»; вероятность этого $C_n^{r-1} p^{r-1} q^{n-r+1}$. Поэтому

$$P\{\xi = n\} = p C_n^{r-1} \cdot p^{r-1} q^{n-r+1} = C_n^{r-1} p^r q^{n-r+1}.$$

$$\text{II.1.55. а) } P\{\xi = k\} = p^k q + q^k p; \quad M\xi = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}; \quad D\xi = \frac{p}{q^2} + \frac{q}{p^2} - 2;$$

$$\text{б) } P\{\eta = k\} = p^2 q^{k-1} + q^2 p^{k-1}; \quad P\{\xi = m, \eta = n\} = p^{m+1} q^n + q^{m+1} p^n.$$

$$\text{II.1.58. } \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}. \quad \text{II.1.61. } M\xi = a; \quad D\xi = a(a+1).$$

$$\text{II.1.69. } P\{\xi = k\} = \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n}; \quad M\xi = \frac{N^{n+1} - \sum_{k=1}^N (k-1)^n}{N^n}.$$

$$\text{II.1.65. } \frac{12!}{2^6 6! 2} \approx 0,0034.$$

II.1.66. Доказать сначала, что вероятность максимальна тогда и только тогда, когда $p_i k_j \leq (k_i + 1) p_j$ для любой пары (i, j) .

$$\text{II.1.70. а) } P\{\xi = k\} = \frac{C_n^k C_{N-n}^{n-k}}{C_N^n};$$

$$\text{б) } M\xi = m \frac{n}{n}, \quad D\xi = m \frac{n}{N} \frac{N-n}{N} \frac{1 - \frac{n}{N}}{1 - \frac{1}{N}}.$$

§ 2

II.2.2. $\Omega = \{(u, v); u^2 + v^2 \leq R^2\}$, если $\xi(\omega)$ — расстояние от точки $\omega = (u, v)$ до начала координат, то $\xi(\omega) = \sqrt{u^2 + v^2}$. Имеем

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} \emptyset, & x \leq 0, \\ \{u, v\}; & u^2 + v^2 < x^2, \quad 0 < x < R, \\ \Omega, & x > R. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\{\omega: \xi(\omega) < x\} \in \mathfrak{U}.$$

Функция распределения $\xi(\omega)$ имеет вид

$$F(x) = \mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) < x\} = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{x^2}{R^2}, & 0 < x \leq R, \\ 1, & x > R. \end{cases}$$

II.2.4. Пусть $x_n \downarrow x$. Тогда

$$\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{\omega: \xi(\omega) < x_n\} \in \mathfrak{U}$$

и

$$\{\omega: \xi(\omega) < x_{n+1}\} \subset \{\omega: \xi(\omega) < x_n\}.$$

Вследствие свойства непрерывности вероятности

$$\mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) \leq x\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) < x_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = F(x+0).$$

II.2.7. Нет. II.2.9. а) Нет; б) Да. II.2.11. Нет.

II.2.16. Пусть A — атом, рассмотреть множество $A \cap \{\omega: \xi(\omega) < c\}$ для каждого c .

II.2.18. Пусть $I = \{A; A \in B(F_0), \chi_A(\omega) \in H\}$. Используя условия задачи, установить, что I — монотонный класс. В соответствии с утверждением задачи I.1.36 $B(F_0) \subset I$. Для произвольной функции $\xi(\omega)$, которая измерима относительно $B(F_0)$, рассмотрим функции $\xi_{j_n}(\omega)$ и $\xi_n(\omega)$:

$$\xi_{j_n}(\omega) = \begin{cases} 1, & \frac{j}{2^n} \leq \xi(\omega) < \frac{j+1}{2^n}, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$\xi_n(\omega) = \sum_{j=-n}^n \frac{1}{2^n} \xi_{j_n}(\omega).$$

Поскольку $\xi_{j_n}(\omega) \in H$, так как $B(F_0) \subset I$, то и $\xi_n(\omega) \in H$ (вследствие условия (II)); $\xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) \in H$ (вследствие (III)).

II.2.20. Пусть H — класс тех борелевских функций n переменных, для которых справедливо утверждение задачи. F_0 — класс полузамкнутых параллелепипедов в $R^n \{x: a_i \leq x_i < b_i, i = \overline{1, n}\}$. Используя утверждение предыдущей задачи, доказать, что класс содержит все борелевские функции.

II.2.21. Рассмотреть индикатор множества A .

II.3.1. в), г), д). II.3.5. $\frac{1}{e}$.

II.3.6. При $x \leq 0$ $P\{e^{\xi} < x\} = 0$; при $x > 0$ имеем $F_{\eta}(x) = P\{e^{\xi} < x\} = P\{\xi < \ln x\} = F(\ln x)$. Таким образом,

$$F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ F(\ln x), & x > 0 \end{cases}$$

II.3.7. $F_{\eta}(x) = 1 - F(-x + 0)$.

II.3.8. а) $F(x) = 1 - F(-x + 0)$; б) $p(x) = p(-x)$.

II.3.9. $M\eta = 1 - [F(+0) - F(0)]$.

II.3.10. а) $F\left(\frac{x-b}{a}\right)$ при $a > 0$, $1 - F\left(\frac{x-b}{a} + 0\right)$ при $a < 0$;

б) $F(\sqrt{x}) - F(-\sqrt{x} + 0)$ при $x > 0$, 0 при $x \leq 0$;

в) если $g(x)$ монотонно возрастает, то $F(g^{-1}(x))$, где $g^{-1}(x)$ — функция обратная к $g(x)$; если $g(x)$ монотонно убывает, то $1 - F(g^{-1}(x) + 0)$;

е)
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left| F(\operatorname{arctg} x + k\pi) - F\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \right|.$$

II.3.11. а) $\frac{1}{|a|^p} \left(\frac{x-b}{a}\right)$; б) $p(x) + p(-x)$; в) $\frac{1}{2\sqrt{x}} [p(\sqrt{x}) + p(\sqrt{-x})]$; г) $p(g^{-1}(x)) | [g^{-1}(x)]' |$.

II.3.14. Равномерное распределение на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

II.3.15. Равномерное распределение на $[0, 1]$.

II.3.18. Нормальное $N(0, 1)$ распределение.

II.3.20. $p_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1, 1)$.

$$\text{II.3.21. } F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1; \\ \frac{\pi + 2 \arcsin x}{2\pi}, & -1 < x \leq 1; \\ 1, & x \geq 1; \end{cases}$$

$$p_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi \sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1).$$

II.3.25. Пусть $0 < x < 1$. Тогда

$$P\{\eta < x\} = P\{F(\xi) < x\} = P\{\xi < F^{-1}(x)\} = F(F^{-1}(x)) = x.$$

При $x \leq 0$ $P\{\eta < x\} = 0$, при $x > 1$ $P\{\eta < x\} = 1$. Таким образом, η имеет равномерное распределение на $(0, 1)$.

II.3.26. Пусть ξ — положительная случайная величина с функцией распределения $F(x)$. Рассмотрим случайную величину $\eta =$

$$= \max\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right).$$

$$\text{II.3.28. } F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{x^2}{R^2}, & 0 < x \leq R, \\ 1, & x > R. \end{cases}$$

II.3.29. Пусть $\angle OQP = y$, тогда $\eta = OP = \operatorname{tg} y$ и $F_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi} \arctg x + \frac{1}{2}$; $p_{\eta}(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ (распределение Коши).

$$\text{II.3.31. } F_{\xi}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin(x-1), \quad 0 < x \leq 2.$$

$$\text{II.3.32. } F_{\gamma}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{2R}, & 0 < x \leq 2R; \\ 1, & x > 2R. \end{cases}$$

$$\text{II.3.33. } p_{\gamma}(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \frac{R}{x^2 + R^2}, & x > 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$\text{II.3.35. } F(x) = \frac{2x}{l} \text{ при } 0 < x \leq \frac{l}{2}.$$

II.3.39. «Склеим» концы отрезка, деформировав отрезок в окружность длины T . Тогда на окружности будем иметь $(n+1)$ точку, которые делят окружность на $(n+1)$ часть. В соответствии с симметрией получим, что каждый из отрезков, на которые разделилась окружность, имеет одну и ту же функцию распределения. Пусть $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n+1}$ — длины отрезков, на которые разделился отрезок $[0, T]$ ($\sum_{k=1}^{n+1} \eta_k = T$). Достаточно найти функцию распределения од-

ного из этих отрезков, например, η_1 . Заметим, что событие $\{\eta_1 > x\}$ произойдет тогда и только тогда, когда каждая из n точек попадет на отрезок $[x, T]$. Поэтому

$$P\{\eta_1 > x\} = \frac{(T-x)^n}{T^n},$$

откуда

$$F_{\eta_1}(x) = 1 - P\{\eta_1 > x\} = 1 - \frac{(T-x)^n}{T^n}.$$

II.3.40. В соответствии с условием

$$\begin{aligned} P\{\xi \geq x + \Delta x\} &= P\{\xi \geq x\} P\{\xi \geq x + \Delta x / \xi \geq x\} = \\ &= P\{\xi \geq x\} (1 - \lambda \Delta x + O(\Delta x)). \end{aligned}$$

Положим $Q(x) = P\{\xi \geq x\}$. Тогда

$$Q(x + \Delta x) - Q(x) = -(\lambda \Delta x + O(\Delta x)) Q(x),$$

откуда

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -\lambda Q(x).$$

Принимая во внимание, что $Q(0) = 1$ (естественное предположение, которое означает, что прибор мгновенно выходит из строя с вероятностью 0) получим $Q(x) = e^{-\lambda x}$ при $x \geq 0$.

II.3.43. По определению условной вероятности имеем:

$$\begin{aligned} P\{\xi - t < x/\xi \geq t\} &= \frac{P\{\xi - t < x, \xi \geq t\}}{P\{\xi \geq t\}} = \\ &= \frac{\int_t^{t+x} \lambda e^{-\lambda u} du}{\int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda u} du} = \frac{e^{-\lambda t} - e^{-\lambda(t+x)}}{e^{-\lambda t}}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$P\{\xi - t < x/\xi \geq t\} = 1 - e^{-\lambda x},$$

т. е. распределение $\xi - t$ при условии $\xi \geq t$ такое же, как и распределение ξ . Это важное свойство показательного распределения, которое среди непрерывных распределений имеет только показательное распределение (см. следующую задачу).

II.3.44. Пусть $Q(x) = P\{\xi \geq x\} = 1 - F(x)$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{\xi < t + x/\xi \geq t\} &= \frac{P\{t \leq \xi < t + x\}}{P\{\xi \geq t\}} = \\ &= \frac{Q(t) - Q(t + x)}{Q(t)} = 1 - Q(x), \end{aligned}$$

откуда $Q(t + x) = Q(t)Q(x)$.

Функция $Q(x)$ — монотонна. Легко доказать, что каждая монотонная функция, которая удовлетворяет функциональному уравнению (1), имеет вид $Q(x) = e^{-\lambda x}$. Поскольку $Q(x)$ ограничена ($Q(x) \leq 1$), то $Q(x) = e^{-\lambda x}$, где $\lambda \geq 0$. Таким образом, случайная величина ξ имеет показательное распределение. Среди непрерывных распределений свойство отсутствия последствия имеет только показательное распределение.

II.3.48. Показательное распределение с параметром λ .

II.3.49. Геометрическое распределение с параметром $p = 1 - e^{-\lambda}$.

$$\begin{aligned} \text{II.3.52. а) } x \int_x^{+\infty} \frac{1}{u} dF(u) &= x \int_x^{\sqrt{x}} \frac{1}{u} dF(u) + x \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{1}{u} dF(u) \leq x \times \\ &\times \frac{1}{x} \int_x^{\sqrt{x}} dF(u) + x \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{\sqrt{x}}^{+\infty} dF(u) = F(\sqrt{x}) - F(x) + \sqrt{x} [1 - F(x) \\ &\times (\sqrt{x})]. \end{aligned}$$

Правая часть в этом неравенстве стремится к нулю при $x \rightarrow +0$.

$$6) \quad x \int_x^{+\infty} \frac{1}{u} dF(u) \leq x \cdot \frac{1}{x} \int_x^{+\infty} dF(u) = 1 - F(x).$$

II.3.53. д) 0.

II.3.57. а) Пусть ξ — случайная величина с непрерывной функцией распределения $F(x)$. Тогда $F(\xi)$ случайная величина, которая имеет равномерное распределение на $(0, 1)$. Поэтому

$$MF(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dF(x) = \frac{1}{2}.$$

II.3.58. а) $\sigma \sqrt{\frac{2}{\pi}}$. II.3.59. $\frac{1}{\pi} \ln 2 + \frac{1}{2}$.

II.3.60. Пусть ξ — длина волокна. Тогда при $x > a$

$$P\{\xi < x/\xi > a\} = \frac{P\{a < \xi < x\}}{P\{\xi > a\}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_x^a e^{-\frac{1}{2} \frac{(u-a)^2}{\sigma^2}} du,$$

и

$$a'' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^{+\infty} z e^{-\frac{1}{2} \frac{(z-a)^2}{\sigma^2}} dz = a + \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}.$$

Аналогично

$$a' = a - \frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}},$$

и поэтому

$$t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma}{a}.$$

II.3.62. Пусть $F(x) = P\{|\xi| < x\}$ и $M|\xi| = \int_0^{\infty} x dF(x) < \infty$;

тогда получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x dF(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} x dF(x) \geq \sum_{k=1}^{\infty} k P\{k \leq |\xi| < k+1\} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\{|\xi| \geq k\}. \end{aligned}$$

Если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} P\{|\xi| \geq k\}$, то имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\{|\xi| \geq k\} = \sum_{k=1}^{\infty} k P\{k \leq |\xi| < k+1\} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \mathbf{P} \{k \leq |\xi| < k+1\} - 1 \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} x dF(x) - 1 = \\
&= \int_0^{\infty} x dF(x) - 1.
\end{aligned}$$

II.3.63. Поскольку существует $\mathbf{M}\xi$, то интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |x| dF(x)$ является конечным. Принимая во внимание неравенство $x(1 - F(x)) \leq \int_x^{+\infty} x dF(x)$, получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - F(x)) \leq \lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{\infty} x dF(x) = 0.$$

Аналогично, из неравенства

$$\int_{-\infty}^x |y| dF(y) \geq |x| F(x)$$

получим

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0.$$

II.3.64. Интегрируя по частям, получаем равенства

$$\int_0^x y dF(y) = \int_0^x y d[F(y) - 1] = -x(1 - F(x)) + \int_0^x (1 - F(y)) dy; \quad (\text{I})$$

$$\int_{-x}^0 y dF(y) = xF(-x) - \int_{-x}^0 F(y) dy. \quad (\text{II})$$

Пусть существует $\mathbf{M}\xi$. Тогда, переходя к пределу при $x \rightarrow \infty$ и учитывая утверждение задачи II.3.63, имеем

$$\int_0^{+\infty} y dF(y) = \int_0^{+\infty} (1 - F(y)) dy; \quad \int_{-\infty}^0 y dF(y) = - \int_{-\infty}^0 F(y) dy.$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\mathbf{M}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} y dF(y) = \int_0^{+\infty} (1 - F(y)) dy - \int_{-\infty}^0 F(y) dy. \quad (\text{III})$$

Пусть интегралы $\int_0^{\infty} (1 - F(y)) dy$, $\int_{-\infty}^0 F(y) dy$ сходятся. Тогда, принимая во внимание неравенства

$$\frac{2}{x}(1 - F(x)) \leq \int_{\frac{x}{2}}^x [1 - F(y)] dy \text{ и } -\frac{1}{2} x F(x) \leq \int_x^{\frac{x}{2}} F(y) dy,$$

будем иметь, что

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x[1 - F(x)] = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xF(x) = 0.$$

Переходя теперь к пределу в равенствах (I) и (II), убеждаемся, что существует $M\xi$ и имеет место (III).

$$\text{II.3.69. } p(x) = \frac{x}{2R^2}, \quad x \in [0, 2R]; \quad \frac{3}{4}R.$$

$$\text{II.3.70. } p(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \cdot \frac{1}{R^{n-1}} x^{n-2} \left(1 - \frac{x^2}{4R^2}\right)^{\frac{n-3}{2}},$$

$$0 < x < 2R.$$

$$\text{II.3.71. } p_{\eta}(x) = \frac{2}{\pi \sqrt{1-x^2}} (0 < x < 1), \quad M\eta = \frac{2}{\pi}.$$

II.3.72. Поскольку площадь поверхности сферического пояса пропорциональна высоте пояса, то

$$P\{\eta < x\} = \frac{2x}{2} = x \text{ при } 0 < x < 1.$$

Таким образом, величина η равномерно распределена на отрезке $[0, 1]$.

$$\text{II.3.73. } p_{\gamma}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} (0 < x < 1), \quad M\gamma = \frac{\pi}{4}.$$

II.3.74. Пусть NS — диаметр сферы и $\angle SNP = \Theta$. Тогда $NP = 2R \cos \Theta$. Но $\cos \Theta$ является проекцией единичного вектора направления NP на диаметр NS и поэтому, вследствие утверждения задачи 72, имеет равномерное распределение на $[0, 1]$.

$$\text{II.3.75. а) } \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{x}{2} (0 < x \leq 2); \quad б) \frac{1}{4} x^2, \quad 0 < x \leq 2.$$

$$\text{II.3.77. а) } p_{\xi}(x) = p_{\eta}(x) = e^{-x} (x > 0); \quad б) \quad 1 - e^{-x} - e^{-y} + e^{-x-y-axy}.$$

$$\text{II.3.78. } p_1(x) = 12x^2(1-x), \quad x \in (0, 1); \quad p_2(x) = 2y, \quad y \in (0, 1);$$

$$p_1(x, y) = p_1(x) p_2(y).$$

II.3.80. Поскольку ξ_1 и ξ_2 независимы, то плотность распределения вектора (ξ_1, ξ_2) равна

$$p_{(\xi_1, \xi_2)}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{v^2}{2}} = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}}.$$

$$\text{II.3.85. } 1 - \frac{1}{x} \text{ при } x > 1.$$

$$\text{II.3.86. } F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{\lambda_1 x}{(\lambda_1 - \lambda_2)x + \lambda_2}, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

$$\text{II.3.87. } F_{\eta}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0; \\ \frac{1}{2} \frac{x}{1-x}, & 0 < x \leq \frac{1}{2}; \\ \frac{3x-1}{2x}, & \frac{1}{2} < x \leq 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

II.3.90. На основании независимости совместная плотность случайных величин ξ_1, ξ_2, Θ равна

$$\frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x_1^2}{2}} e^{-\frac{x_2^2}{2}} \frac{1}{2\pi},$$

и поэтому

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 \cos \Theta + \xi_2 \sin \Theta < z\} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int \int \int_{\substack{\{x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3 < z\} \\ 0 \leq x_3 \leq 2\pi}} e^{-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}} dx_1 dx_2 dx_3 = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dx_3 \left(\int \int_{\{x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3 < z\}} e^{-\frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2}} dx_1 dx_2 \right). \end{aligned}$$

После перехода в двойном интеграле к новым координатам $u_1 = x_1 \cos x_3 + x_2 \sin x_3$, $u_2 = x_1 \sin x_3 - x_2 \cos x_3$ имеем

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 \cos \Theta + \xi_2 \sin \Theta < z\} &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} dx_3 \int \int_{\{u_1 < z\}} e^{-\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2}} du_1 du_2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{u_1^2}{2}} du_1. \end{aligned}$$

Таким образом, величина $\xi_1 \cos \Theta + \xi_2 \sin \Theta$ имеет нормальное распределение с параметрами 0 и 1.

II.3.91. а) Пусть $D = \{(u, v) : u + v < x\}$ и

$$\chi_D(u, v) = \begin{cases} 1, & (u, v) \in D; \\ 0, & (u, v) \notin D. \end{cases}$$

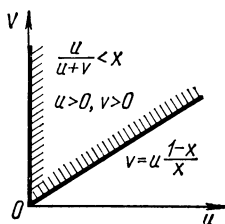


Рис. 15

Пусть $D = \{(u, v): u^2 + v^2 \leq R^2\}$. Тогда

$$\begin{aligned} P\{\xi_1, \xi_2 \in D\} &= \\ &= \iint_D p(\xi_1, \xi_2)(u, v) du dv = \\ &= \frac{1}{2\pi} \iint_{u^2+v^2 \leq R^2} e^{-\frac{u^2+v^2}{2}} du dv = \frac{1}{2\pi} \times \\ &\times \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} r dr dy = 1 - e^{-\frac{1}{2}R^2}. \end{aligned}$$

II.3.82. $p_\xi(x) = e^{-x}, x > 0$; $p_\eta(y) = \frac{1}{(1+y)^2}, y > 0$.

II.3.83. $p_\xi(x) = \frac{1}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-x} (x > 0)$;

$p_\eta(x) = \frac{1}{\Gamma(q)} x^{q-1} e^{-x} (x > 0)$.

II.3.84. Поскольку ξ и η — положительные случайные величины, то с вероятностью 1 получим

$$0 < \frac{\xi}{\xi + \eta} < 1.$$

Поэтому

$$P\left\{\frac{\xi}{\xi + \eta} < x\right\} = \begin{cases} 1, & x \geq 1; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Пусть $0 < x < 1$. Тогда

$$P\left\{\frac{\xi}{\xi + \eta} < x\right\} = P\{(\xi, \eta) \in D\},$$

где область D определена неравенствами (рис. 15):

$$D = \left\{(u, v): \frac{u}{u+v} < x, u > 0, v > 0\right\}.$$

Интегрируя плотность распределения вектора (ξ, η) по области D , имеем:

$$\begin{aligned} P\left\{\frac{\xi}{\xi + \eta} < x\right\} &= \lambda^2 \iint_D e^{-\lambda u - \lambda v} du dv = \\ &= \lambda^2 \int_0^{+\infty} du \int_{u \frac{1-x}{x}}^{+\infty} e^{-\lambda u - \lambda v} dv = x. \end{aligned}$$

Таким образом, случайная величина $\frac{\xi}{\xi + \eta}$ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$.

Тогда $M\chi_D(\xi_1, \xi_2) = P\{(\xi_1, \xi_2) \in D\}$. С другой стороны, по формуле для математического ожидания функции от случайного вектора

$$M\chi_D(\xi_1, \xi_2) = \iint \chi_D(u, v) dF_{(\xi_1, \xi_2)}(u, v).$$

Поскольку величины ξ_1 и ξ_2 — независимы, то $F_{(\xi_1, \xi_2)}(u, v) = F_{\xi_1}(u) F_{\xi_2}(v)$, и в конце концов

имеем

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 + \xi_2 < x\} &= P\{(\xi_1, \xi_2) \in D\} = \iint_D dF_{\xi_1}(u) dF_{\xi_2}(v) = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-u) dF_{\xi_1}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{\xi_2}(x-v) dF_{\xi_2}(v). \end{aligned}$$

II.3.93. $P\{\xi_1 \xi_2 < x\} = \iint_D dF_{\xi_1}(u) dF_{\xi_2}(v)$, где $D = \{(u, v) : uv < x\}$ (рис. 16).

II.3.94. $P\left\{\frac{\xi_1}{\xi_2} < x\right\} = \iint_D dF_{\xi_1}(u) dF_{\xi_2}(v)$, где $D = \{(u, v) : \frac{u}{v} < x\}$ (рис. 17).

II.3.95. $p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & |x| > 1; \\ 1 - |x|, & |x| \leq 1. \end{cases}$

II.3.96. а) $p_\eta(x) = \ln x$ при $0 < x < 1$,

$p_\eta(x) = 0$ при $x \notin (0, 1)$;

б) $p_\eta(x) = 1 - |x|$ при $|x| \leq 1$,

$p_\eta(x) = 0$ при $|x| > 1$.

II.3.97. $p_\eta(x) = \frac{1}{a} \left(1 - \frac{|x|}{a}\right) (|x| < a)$.

II.3.99. $p_\eta(x) = \frac{|x| + 1}{4} e^{-|x|}$.

II.3.101. $p_{\xi\eta}(x) = 12x(1-x)^2$, $x \in (0, 1)$.

II.3.104. γ имеет распределение Коши.

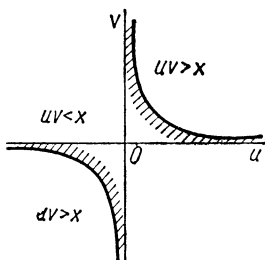


Рис. 16

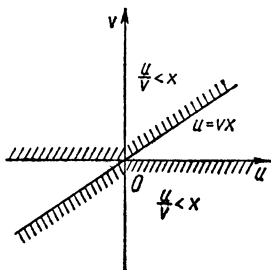


Рис. 17

$$\text{II.3.105. а) } \frac{x}{1+x}, x > 0; \text{ б) } \frac{1}{1+x^2}, x > 0;$$

в) математическое ожидание не существует.

II.3.107. Использовать метод математической индукции и задачу II.3.106.

$$\text{II.3.110. } p_{\eta}(z) = \begin{cases} z^2, & 0 < z \leq 1; \\ z(2-z), & 1 < z < 2; \\ 0, & \text{при всех других } z. \end{cases}$$

$$\text{II.3.115. } f(x) = 12x(4x - x^2 - 2 \ln x - 3), 0 < x < 1.$$

$$\text{II.3.117. а) } \frac{\alpha}{\beta}; \text{ б) } \frac{\alpha}{\beta^2}.$$

II.3.118. При $x \leq 0$ $F_{\eta}(x) = P\{\xi^2 < x\} = 0$, а при $x > 0$ имеем

$$\begin{aligned} F_{\eta}(x) &= P\{\eta < x\} = P\{-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{x}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \end{aligned}$$

Плотность распределения η равна

$$f_{\eta}(x) = F'_{\eta}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}x},$$

а это и есть плотность гамма-распределения с параметрами $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$$\begin{aligned} \text{II.3.119. } f_{\eta}(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{\xi_1}(x-y) f_{\xi_2}(y) dy = \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} \int_0^x (x-y)^{\alpha_1-1} e^{-\beta(x-y)} y^{\alpha_2-1} e^{-\beta y} dy = \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} e^{-\beta x} \int_0^x (x-y)^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} dy. \end{aligned}$$

Сделав замену $y = tx$, получим

$$\begin{aligned} f_{\eta}(x) &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)} B(\alpha_1, \alpha_2) x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta x} = \\ &= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)} x^{\alpha_1+\alpha_2-1} e^{-\beta x} \quad (x > 0). \end{aligned}$$

$$\text{II.3.122. } \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(1+x)^{\frac{m+n}{2}}}, \quad x > 0.$$

II.3.124. Рассмотреть $\ln \eta$ и воспользоваться тем, что $\ln \frac{1}{\xi_k}$ имеет показательное распределение.

II.3.128. Нужно доказать равенство

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \{ \xi_1 - \xi_2 < x, \xi_1 + \xi_2 < y \} = \\ & = \mathbf{P} \{ \xi_1 - \xi_2 < x \} \mathbf{P} \{ \xi_1 + \xi_2 < y \}. \end{aligned}$$

Для этого в интеграле

$$\iint_{\{u-v < x, u+v < y\}} e^{-\frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2}} du dv$$

сделаем замену переменных: $u - v = t$, $u + v = s$ и используем то, что каждая из величин $\xi_1 - \xi_2$ и $\xi_1 + \xi_2$ имеет нормальное распределение $N(0, 2)$. Известно, что утверждение этой задачи имеет место только в случае нормально распределенных величин ξ_1 и ξ_2 .

II.3.129. Рассмотрим для произвольных $x \geq 0$, $y \geq 0$ вероятность

$$\mathbf{P} \{ \xi_1 - \xi_2 > x, \min(\xi_1, \xi_2) > y \} = I.$$

Учитывая независимость ξ_1 и ξ_2 , имеем:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\{u-v > x, \min(u, v) > y\}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 u} \lambda_2 e^{-\lambda_2 v} du dv = \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \int_{x+y}^{\infty} e^{-\lambda_1 u} \left\{ \int_y^{u-x} e^{-\lambda_2 v} dv \right\} du = \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \int_x^{\infty} e^{-\lambda_1(y+u)} \left\{ \int_y^{u+y-x} e^{-\lambda_2 v} dv \right\} du = \\ &= e^{-\lambda_1 y} e^{-\lambda_2 y} \lambda_1 \lambda_2 \int_x^{\infty} e^{-\lambda_1 u} \left\{ \int_0^{u-x} e^{-\lambda_2 v} dv \right\} du = \\ &= \mathbf{P} \{ \xi_1 - \xi_2 > x \} \mathbf{P} \{ \min(\xi_1, \xi_2) > y \}. \end{aligned}$$

Отсюда легко получить независимость событий

$$\{ \xi_1 - \xi_2 < x \} \text{ и } \{ \min(\xi_1, \xi_2) < y \}$$

в случае $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Если $x < 0$, то нужно рассмотреть вероятность

$$\mathbf{P} \{ \xi_1 - \xi_2 < x, \min(\xi_1, \xi_2) > y \} = \mathbf{P} \{ \xi_2 - \xi_1 > -x, \min(\xi_2, \xi_1) > y \}$$

и использовать только что доказанное равенство.

Замечание. Известно такое утверждение: Если ξ_1 и ξ_2 имеют плотность распределения и $\xi_1 - \xi_2$ и $\min(\xi_1, \xi_2)$ независимы, то величины ξ_1 и ξ_2 имеют экспоненциальное распределение.

II.3.134. Рассмотрим случай, когда $n=1$. Затем, используя индукцию по n , получим:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\xi_k}{2^k} + \frac{\eta}{2^{n+1}} = \frac{\xi_1}{2} + \frac{1}{2} \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{\xi_k}{2^{k-1}} + \frac{\eta}{2^n} \right).$$

II.3.135. Поскольку $\xi = \operatorname{tg} \varphi$, где φ — случайная величина, равномерно распределенная на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\frac{1}{\xi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right); \quad \frac{2\xi}{1-\xi^2} = \operatorname{tg} 2\varphi;$$

$$\frac{3\xi - \xi^3}{1-3\xi^2} = \operatorname{tg} 3\varphi,$$

II.3.136. Если $\xi_1 = \operatorname{tg} \varphi_1$, $\xi_2 = \operatorname{tg} \varphi_2$, где φ_1 и φ_2 — независимые одинаково распределенные на $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ случайные величины, то $\eta = \operatorname{tg} (\varphi_1 + \varphi_2)$.

II.3.137. $\frac{2 \ln |x|}{\pi^2 x^2 - 1}.$

II.3.138. а) $\rho = 0$; б) $\rho = (21)^{1/2}/5$;

в) $\rho = 4 \cdot 6^{1/2}/\pi^2$; г) $\rho = 0$.

II.3.139. $-\frac{1}{2}.$ **II.3.143.** 2. **II.3.144.** $P_{\xi}(x) = \frac{2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}{\pi a}$

при $|x| < a$.

II.3.146. Пусть $f(x)$ имеет математическое ожидание μ и дисперсию σ^2 . Тогда

$$M\xi_1 = M\xi_2 = \frac{1}{2} \mu;$$

$$D\xi_1 = D\xi_2 = \frac{1}{3} \sigma^2 + \frac{1}{12} \mu^2; \quad \operatorname{cov} (\xi_1, \xi_2) = \frac{1}{6} \sigma^2 - \frac{1}{12} \mu^2.$$

II.3.149. Пусть A — произвольное борелевское множество в R^n , а B — его образ при преобразовании (2). Тогда

$$P \{ (\eta_1, \dots, \eta_n) \in A \} = P \{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B \}.$$

Имеем

$$P \{ (\eta_1, \dots, \eta_n) \in A \} = \int_A P_{\eta_1, \dots, \eta_n} (y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n,$$

$$P \{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B \} = \int_B P_{\xi_1, \dots, \xi_n} (x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n.$$

Переходя в последнем интеграле к новым переменным y_1, \dots, y_n по формулам (2), получим

$$\begin{aligned} P \{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in B \} &= \int_A P_{(\xi_1, \dots, \xi_n)} (g(y_1, \dots, y_n), \\ &\dots, g_n(y_1, \dots, y_n)) \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \dots dy_n = \\ &= P \{ \eta_1, \dots, \eta_n \in A \} = \int_A P_{(\eta_1, \dots, \eta_n)} (y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n, \end{aligned}$$

откуда и следует, что

$$\begin{aligned} P_{(\eta_1, \dots, \eta_n)} (y_1, \dots, y_n) &= P_{(\xi_1, \dots, \xi_n)} (g(y_1, \dots, y_n), \dots, \\ &g(y_1, \dots, y_n)) \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \right|, \end{aligned}$$

так как множество A произвольно.

II.3.150. В соответствии с утверждением задачи 149, имеем:

$$\begin{aligned} P_{(R, \Phi)}(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right\} r \\ (0 \leq r < +\infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi). \end{aligned}$$

Отсюда видно, что R и Φ — независимы, плотность распределения R равна

$$P_R(r) = \frac{1}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{r^2}{\sigma^2} \right\} r,$$

а плотность распределения Φ равна $\frac{1}{2\pi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

II.3.155. Плотность распределения (R, Φ) равна

$$g(r, \varphi) = g(r) r = 2\pi g(r) r \frac{1}{2\pi}.$$

Таким образом, R и Φ — независимые случайные величины, Φ — равномерно распределена на $[0, 2\pi]$, плотность распределения R равна $2\pi g(r) r$.

II.3.157. Плотность распределения (R, Θ, Φ) равна

$$\begin{aligned} g(r, \Theta, \varphi) &= g(r) r^2 \sin \Theta = 4\pi g(r) r^2 \frac{1}{2} \sin \Theta \cdot \frac{1}{2\pi} \\ (0 < r < +\infty, 0 < \Theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi). \end{aligned}$$

Таким образом, R , Θ и Φ — независимые случайные величины, R имеет плотность распределения $4\pi g(r) r^2$; плотность распределения Θ есть $\frac{1}{2} \sin \Theta$ ($0 \leq \Theta \leq \pi$); плотность распределения Φ есть $\frac{1}{2\pi}$ ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

II.3.160. Пусть η — длина вектора, γ — длина проекции вектора на ось OX . Тогда $\gamma = \eta\xi$ — длина проекции равномерно распределенного на единичной сфере вектора. По условию задачи η и ξ — независимые случайные величины. В соответствии с утверждением задачи II.3.72 величина ξ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$. Используя формулу для функции распределения произведения независимых величин, получим утверждение а). Утверждение б) получим из утверждения а) дифференцированием.

II.3.161. Плотность распределения длины проекции равна

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (t > 0).$$

Дальше использовать результат задачи II.3.160.

II.3.163. $P\{\xi_{(1)} < x\} = 1 - P\{\min(\xi_1, \dots, \xi_n) \geq x\} = 1 - P\{\xi_1 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\} = 1 - \prod_{k=1}^n P\{\xi_k \geq x\} = 1 - e^{-\lambda nx}.$

II.3.167. а) Вычислим вероятность случайного события $\{\xi_{(1)} \geq x\}$. Поскольку

$$\{\xi_{(1)} \geq x\} = \{\xi_1 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\},$$

то вследствие независимости случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n имеем

$$P\{\xi_{(1)} \geq x\} = \prod_{k=1}^n P\{\xi_k \geq x\} = [1 - F(x)]^n.$$

Поэтому

$$P\{\xi_{(1)} < x\} = 1 - P\{\xi_{(1)} \geq x\} = 1 - [1 - F(x)]^n.$$

б) Поскольку $\{\xi_{(n)} < x\} = \{\xi_1 < x, \dots, \xi_n < x\}$, то

$$P\{\xi_{(n)} < x\} = \prod_{k=1}^n P\{\xi_k < x\} = F^n(x).$$

в) Случайное событие $\{\xi_{(m)} < x\}$ происходит тогда и только тогда, когда по крайней мере m случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n не превышают x .

Поэтому

$$P\{\xi_{(m)} < x\} = \sum_{k=m}^n C_n^k F^k(x) [1 - F(x)]^{n-k}.$$

II.3.168. Подсчитаем с точностью до $O(\Delta x)$ вероятность

$$P\{x \leq \xi_{(m)} < x + \Delta x\}.$$

Каждая из случайных величин ξ_1, \dots, ξ_n попадает в один из трех интервалов $(-\infty, x)$, $[x, x + \Delta x)$, $[x + \Delta x, +\infty)$. Используя полиномиальное распределение, получим

$$\begin{aligned} P\{x \leq \xi_{(m)} < x + \Delta x\} &= \frac{n!}{(m-1)! 1! (n-m)!} \times \\ &\times F^{(m-1)}(x) p(x) \Delta x [1 - F(x)]^{n-m} + O(\Delta x). \end{aligned}$$

Преобразование (1) — линейное преобразование, определитель которого равен 1. Это преобразование отображает область

$$D = \{x : x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq T; x_i \geq 0\}$$

в область

$$D^* = \{u : u_i \geq 0, \sum_{i=1}^n u_i \leq T\}.$$

Поэтому плотность распределения (η_1, \dots, η_n) равна

$$P_{(\eta_1, \dots, \eta_n)}(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} \frac{n!}{T^n} & u \in D^*; \\ 0 & u \notin D^*. \end{cases}$$

Следовательно, точка (η_1, \dots, η_n) равномерно распределена в D^* .

д) Использовать результат задачи II.3.174.

II.3.176. $p_{\eta_n}(x) = n(n-1)x^{n-2}(1-x), 0 < x < 1;$

$$M\eta_n = \frac{n-1}{n+1} n t^{n-1} - (n-1)t^n.$$

II.3.179. а) Пусть P и Q — точки, которые выбираются в D независимо с равномерным распределением, а ρ_{PQ} — расстояние между ними.

Тогда

$$Mf(\rho_{PQ}) = \frac{1}{V^2(D)} \int_D \int_D f(|x-y|) dx dy.$$

С другой стороны, $Mf(\rho_{PQ}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dF_D(z).$

б) Использовать результат задачи II.3.36.

в) Использовать утверждение задачи II.3.70.

II.3.180. Из условий задачи следует, что

$$I(y) = P\{\eta \geq y\} = \int_y^\infty \frac{z-y}{z} dF_\xi(z) = \int_y^\infty \left(1 - \frac{y}{z}\right) dF_\xi(z); \quad (1)$$

$$P\{\xi - \eta \geq u\} = \int_u^\infty \frac{z-u}{u} dF_\xi(z) = I(u);$$

$$P\{\eta \geq y, \xi - \eta > u\} = \int_{u+y}^\infty \left(1 - \frac{u+y}{z}\right) dF_\xi(z) = I(u+y).$$

Если γ и η независимы, то

$$I(u+y) = I(u) I(y),$$

откуда $I(y) = e^{-ay}$, где a — некоторая константа ($a > 0$). Дифференцируя дважды равенство (1), найдем $p_\xi(x)$.

$$\text{II.3.181. Положим } \eta_{11} = \frac{\xi_{11} + \xi_{12}}{2}, \eta_{22} = \frac{\xi_{11} - \xi_{22}}{2};$$

$$\eta_{12} = \frac{\xi_{12} + \xi_{21}}{2}, \eta_{21} = \frac{\xi_{12} - \xi_{21}}{2}.$$

Тогда

$$\Delta = (\eta_{11}^2 + \eta_{21}^2) - (\eta_{22}^2 + \eta_{12}^2).$$

Поскольку все случайные величины η_{ij} независимы и имеют нормальное распределение $N\left(0, \frac{1}{2}\right)$, то $\eta_{11}^2 + \eta_{21}^2$ и $\eta_{22}^2 + \eta_{12}^2$ имеют показательное распределение с параметром $\lambda = 1$ (χ^2 -распределение с двумя степенями свободы). Поэтому

$$p_\Delta(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}.$$

II.3.182. Поскольку случайные величины $\frac{\xi_k}{\xi_1 + \dots + \xi_n}$ одинаково распределены, то $M \frac{\xi_k}{\xi_1 + \dots + \xi_n} = c$ (не зависит от k). Поэтому

$$M \frac{\xi_1 + \dots + \xi_k}{\xi_1 + \dots + \xi_n} = \sum_{i=1}^k M \frac{\xi_i}{\xi_1 + \dots + \xi_n} = kc,$$

Константу c находим из условия $M \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_k}{\xi_1 + \dots + \xi_n} \right) = 1 = nc$. Таким образом,

$$M \frac{\xi_1 + \dots + \xi_k}{\xi_1 + \dots + \xi_n} = \frac{k}{n}.$$

II.3.183. а) Очевидно, $Q_\xi(+\infty) = P\{-\infty < \xi < +\infty\} = 1$. С другой стороны, $Q_\xi(0) = \sup_x P\{\xi \leq x\}$.

б) Таким образом, $Q_\xi(0)$ равно наибольшему скачку функции распределения ξ . Пусть $l_1 < l_2$, для любого $\varepsilon > 0$ существует интервал длины l_1 $[x_1, x_1 + l_1]$ такой, что

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_1 + l_1\} > Q_\xi(l_1) - \varepsilon.$$

Но

$$P\{x_1 \leq \xi \leq x_1 + l_2\} \geq P\{x_1 \leq \xi \leq x_1 + l_1\} > Q_\xi(l_1) - \varepsilon,$$

откуда $Q_\xi(l_2) \geq Q_\xi(l_1)$.

$$\text{в) } Q_\xi(l) = \sup_{x \in R} [F(x+l-0) - F(x)].$$

Как было показано выше,

$$Q_{\xi+\eta}(l) = \sup_{x \in R} [F_{\xi+\eta}(x+l+0) - F_{\xi+\eta}(x)].$$

Но
$$F_{\xi+\eta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{\xi}(x-y) dF_{\eta}(y),$$

поэтому

$$Q_{\xi+\eta}(l) = \sup_{x \in R} \left[\int_{-\infty}^{\infty} (F_{\xi}(x+l+0-y) - F_{\xi}(x-y)) dF_{\eta}(y) \right].$$

По определению функции $Q(l)$ имеем

$$F_{\xi}(x+l+0-y) - F_{\xi}(x-y) \leq \sup_{u \in R} [F_{\xi}(u+l+0) - F_{\xi}(u)] = Q_{\xi}(l).$$

Таким образом,

$$Q_{\xi+\eta}(l) \leq \sup_{x \in R} \int_{-\infty}^{\infty} Q_{\xi}(l) dF_{\eta}(y) = Q_{\xi}(l).$$

Аналогично можно доказать неравенство

$$Q_{\xi+\eta}(l) \leq Q_{\eta}(l).$$

д) Если функция распределения ξ непрерывна, то $Q_{\xi}(0) = 0$. Таким образом, из непрерывности $Q_{\xi+\eta}(0) \leq Q_{\xi}(0)$ следует, что $Q_{\xi+\eta}(0) = 0$.

II.3.184. Имеем

$$P\{x \leq \xi \leq x+l\} = \frac{1}{\pi} \left[\arctg \frac{x+l}{a} - \arctg \frac{x}{a} \right].$$

Приравняв к нулю производную последнего выражения, найдем, что оно принимает максимальное значение при $x = -\frac{l}{2}$.

Таким образом,

$$Q(l) = \frac{2}{\pi} \arctg \frac{l}{2a}.$$

§ 4

II.4.10. $P\{Q(\xi_1, \xi_2) > y\} = e^{-y}$, $y > 0$.

II.4.12. а) Используя результат задачи II.3.149, получим, что совместная плотность распределения (R, Φ) равна

$$\begin{aligned} p_{R, \Phi}(r, \varphi) = & \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} - \right. \right. \\ & \left. \left. - 2\rho \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right] \right\}; \end{aligned}$$

б) интегрируя $p_{R, \Phi}(r, \varphi)$ по r от 0 до ∞ , получим плотность распределения Φ :

$$p_{\Phi}(\varphi) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2}} \cdot$$

$$(0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

В частности φ имеет равномерное распределение, если $\rho = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$;

в) для нахождения плотности распределения R интегрируем $p_{R, \Phi}(r, \varphi)$ по φ от 0 до 2π .

При этом мы используем интеграл

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-zs \sin \theta} d\theta,$$

где $I_0(z)$ — модифицированная бesselова функция первого рода с нулевым индексом. Имеем:

$$p_R(r) = \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{\cos^2 \varphi}{\sigma_1^2} - \right. \right.$$

$$\left. \left. - 2\rho \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{\sigma_2^2} \right] \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4(1-\rho^2)} \left[\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right] \right\} \times$$

$$\times \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \left[\cos 2\varphi \left(\frac{1}{2\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_2^2} \right) - \frac{\rho \sin 2\varphi}{\sigma_1\sigma_2} \right] \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{r}{\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4(1-\rho^2)} \left[\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right] \right\} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right)^2 + \frac{\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \sin(2\varphi + \gamma) \right\} d\varphi =$$

$$= \frac{r}{\sigma_1\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{r^2}{4(1-\rho^2)} \left[\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} \right] \right\} I_0 \left(\frac{r^2}{2(1-\rho^2)} \times \right.$$

$$\left. \times \sqrt{\frac{1}{4} \left(\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{\sigma_2^2} \right)^2 + \frac{\rho^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}} \right).$$

В частности, если $\rho = 0$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, то

$$p_R(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp \left\{ -\frac{r^2}{2\sigma^2} \right\}.$$

II.4.13. Используем для решения задачи результат предыдущей задачи. Имеем

$$\begin{aligned} P\{\xi\eta > 0\} &= P\left\{\left(0 < \Phi < \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi < \Phi < \frac{3}{2}\pi\right)\right\} = \\ &= \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1-\rho \sin 2\varphi} = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{du}{1-\rho \sin u}. \end{aligned}$$

Вычислить последний интеграл, вводя новую переменную $t = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$. Имеем

$$P\{\xi\eta > 0\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arcsin \rho.$$

II.4.14. Используя симметрию, находим

$$M[\max(\xi\eta)] = \frac{1}{\pi \sqrt{1-\rho^2}} \iint_{\{x>y\}} x \exp\left\{-\frac{x^2-2\rho xy+y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dx dy.$$

Сделаем замену: $x = x$, $y - \rho x = u \sqrt{1-\rho^2}$. Интеграл запишется так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \iint_{\left\{u < \frac{1-\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}x\right\}} x e^{-\frac{1}{2}(x^2+u^2)} dx du &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\int_{\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1-\rho}}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] du = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left[\int_{\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{1-\rho}}^{\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] du = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2(1-\rho^2)}} du = \sqrt{\frac{1-\rho^2}{\pi}}. \end{aligned}$$

§ 5

$$\begin{aligned} \text{II.5.1. } M\xi^2(\omega) &= \int_{\Omega} \xi^2(\omega) dP = \int_{\{\omega: |\xi(\omega)| > \varepsilon\}} \xi^2(\omega) dP + \\ + \int_{\{\omega: |\xi(\omega)| < \varepsilon\}} \xi^2(\omega) dP &\geq \int_{\{\omega: |\xi(\omega)| < \varepsilon\}} \xi^2(\omega) dP \geq \varepsilon^2 P\{\omega: |\xi(\omega)| > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II.5.5. Имеем } Mf(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) + \int_{\varepsilon}^{\infty} t(x) dF(x) \geq f(\varepsilon) P\{\xi > \varepsilon\}. \end{aligned}$$

II.5.12. а) Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим функцию $f(x) = (x + c)^2$ ($c > 0$). Поскольку при $x > \varepsilon$ функция $t(x) \geq (c + \varepsilon)^2$, то в соответствии с утверждением задачи II.5.6,

$$P\{\xi > \varepsilon\} \leq \frac{M(\xi + c)^2}{(c + \varepsilon)^2} = \frac{c^2 + \sigma^2}{(c + \varepsilon)^2}.$$

Правая часть неравенства достигает минимального значения $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$ при $c = \frac{\sigma^2}{\varepsilon}$.

б) Пусть $\varepsilon < 0$. Положим $f(x) = (x - c)^2$. Поскольку при $x < \varepsilon$ функция $f(x) \geq (\varepsilon - c)^2$, то, в соответствии с утверждением задачи II.5.6,

$$P\{\xi < \varepsilon\} \leq \frac{M(\xi - c)^2}{(\varepsilon - c)^2} = \frac{\sigma^2 + c^2}{(\varepsilon - c)^2}.$$

Правая часть этого неравенства принимает минимальное значение $\frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \varepsilon^2}$ при $c = -\frac{\sigma^2}{\varepsilon}$.

II.5.19. Поскольку при замене ξ и η на $a\xi$ и $b\eta$ образуется равносильное неравенство, то достаточно доказать неравенство для таких случайных величин, которые удовлетворяют условиям $M\xi^2 = 1$, $M\eta^2 = 1$. Но в этом случае неравенство следует из неравенства $|\xi||\eta| \leq \xi^2 + \eta^2$ (достаточно взять математическое ожидание от обеих частей этого неравенства).

II.5.20. Функция $u(x) = \ln x$ выпукла вверх на $(0, +\infty)$. Поэтому при любых $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $0 < t < 1$

$$(1-t) \ln x_1 + t \ln x_2 \leq \ln[(1-t)x_1 + tx_2].$$

Отсюда

$$x_1^{1-t} x_2^t \leq (1-t)x_1 + tx_2.$$

Достаточно доказать неравенство для случайных величин ξ и η , которые удовлетворяют условию $M|\xi|^p = M|\eta|^q = 1$.

Положим в неравенстве (1): $t = \frac{1}{q}$, $1-t = \frac{1}{p}$, подставим $x_1 = |\xi|^p$, $x_2 = |\eta|^q$ и возьмем математическое ожидание от обеих частей неравенства (1). Имеем: $M|\xi\eta| \leq 1$.

II.5.21. В соответствии с неравенством Коши, имеем

$$(M|\xi|^t)^2 = (M|\xi|^{t-h} |\xi|^{t+h})^2 \leq M|\xi|^{t-h} M|\xi|^{t+h}.$$

Логарифмируя это неравенство, получим

$$2u(t) \leq u(t-h) + u(t+h),$$

что и означает выпуклость $u(t)$.

II.5.22. а) Для симметричных случайных величин распределение ξ совпадает с распределением $-\xi$. Поэтому

$$M \operatorname{ch} 2y\xi = M \frac{e^{2y\xi} + e^{-2y\xi}}{2} = M e^{2y\xi},$$

откуда и следует утверждение а).

б) Имеем

$$\tau(\xi) = \sup_{y>0} \sqrt{\frac{1}{2y^2} \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2yx - \frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma}.$$

г) Положим $y_0 = \frac{x}{2\tau^2(\xi)}$. Имеем

$$\tau^2(\xi) \geq \frac{1}{2y_0^2} \ln M \exp 2y_0\xi, \text{ или } e^{2y_0^2\tau^2(\xi)} \leq \int_{-\infty}^{\infty} e^{2y_0z} dF(z),$$

где $F(z)$ — функция распределения ξ . Дальше

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2y_0z} dF(z) \geq e^{2y_0x} \int_x^{\infty} dF(z) = e^{2y_0x} P\{\xi > x\},$$

и поэтому

$$P\{\xi > x\} \leq e^{2y_0^2\tau^2(\xi) - 2y_0x} = e^{-\frac{x^2}{2\tau^2(\xi)}},$$

если подставить y_0 .

II.5.23. Заметим, что

$$M \exp(2y\xi) \leq \exp(2\tau^2(\xi)y^2) \text{ при } y > 0.$$

Используя неравенство Коши, имеем

$$\begin{aligned} M \exp[2y(\xi_1 + \xi_2)] &\leq (M \exp 4y\xi_1 M \exp 4y\xi_2)^{1/2} \leq \\ &\leq (\exp 8y^2\tau^2(\xi_1) \exp 8y^2\tau^2(\xi_2))^{1/2} \leq \exp 2y^2(2(\tau^2(\xi_1) + \tau^2(\xi_2))), \end{aligned}$$

откуда

$$\tau^2(y) \leq 2(\tau^2(\xi_1) + \tau^2(\xi_2)).$$

Аналогично можно получить

$$\tau^2(-\eta) \leq 2(\tau^2(-\xi_1) + \tau^2(-\xi_2)),$$

и поскольку

$$\tau^*(\eta) \leq \max(\tau(\eta), \tau(-\eta)),$$

то утверждение доказано.

§ 6.

II.6.1. а) $M(\xi/\mathfrak{A}) = \xi$ с вероятностью 1; б) $P\{M(\xi/\mathfrak{B}) = M\xi\} = 1$; в) с вероятностью 1:

$$M(\xi/\mathfrak{B}) = \frac{1}{P(A)} \int_A \xi P(d\omega) \chi_A + \frac{1}{P(\bar{A})} \int_{\bar{A}} \xi P(d\omega) \chi_{\bar{A}}.$$

II.6.2. С вероятностью 1

$$\begin{aligned} P(A/\eta) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{P\{\eta = x_k\}} P(A \cap \{\eta = x_k\}) \chi_{\{\eta = x_k\}}, \\ M(\xi/\eta) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{P\{\eta = x_k\}} \int_{\{\eta = x_k\}} \xi P(d\omega) \chi_{\{\eta = x_k\}}. \end{aligned}$$

II.6.3. Для любого k , $1 \leq k \leq n$,

$$P(A/B_k) = \frac{1}{a_k - a_{k-1}} P(A \cap (a_{k-1}, a_k]), \quad a_0 = 0, \quad a_n = 1.$$

С вероятностью 1:

$$P(A/\mathfrak{B}) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k - a_{k-1}} P(A \cap (a_{k-1}, a_k]) \chi_{(a_{k-1}, a_k]},$$

$$M(\xi/\eta) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k - a_{k-1}} \int_{a_{k-1}}^{a_k} \xi(\omega) d\omega \chi_{(a_{k-1}, a_k]}.$$

II.6.4. С вероятностью 1:

$$M(\xi/\mathfrak{B}_1) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(\xi + k) \right]^{-1} \sum_{k=-\infty}^{\infty} (\xi + k) f(\xi + k),$$

$$M(\xi/\mathfrak{B}_2) = \frac{\xi f(\xi) - \xi f(-\xi)}{f(\xi) + f(-\xi)}.$$

II.6.5. Утверждение а) — следствие такого свойства интеграла: если функция h \mathfrak{B} -измерима на Ω и для любого $B \in \mathfrak{B}$

$$\int_B h(\omega) P(d\omega) \geq 0,$$

то $P\{h \geq 0\} = 1$. Остальные утверждения следуют из а) и определения условного математического ожидания.

II.6.6. Это следствие равенства (2) из определения условного математического ожидания при $B = \Omega$.

II.6.7. Действительно, для $B \in \mathfrak{B}$

$$\int_B M(\xi/\mathfrak{B}) P(d\omega) = \int_B \xi P(d\omega) = \int_{\Omega} \xi \chi_B P(d\omega) = M(\xi \chi_B).$$

Из независимости ξ и χ_B следует равенство

$$M(\xi \chi_B) = M\xi \cdot M\chi_B,$$

потому

$$\int_B M(\xi/\mathfrak{B}) P(d\omega) = \int_B M\xi \cdot P(d\omega).$$

II.6.8. Если \mathfrak{B}_1 и \mathfrak{B}_2 независимы, то нужное равенство справедливо в силу результата предыдущей задачи. С другой стороны, если $A \in \mathfrak{B}_1$, то для $\xi = \chi_A$ по условию задачи

$$P\{M(\chi_A/\mathfrak{B}_2) = P(A)\} = 1$$

и поэтому для любого $B \in \mathfrak{B}_2$ по определению условного математического ожидания

$$\int_B M(\chi_A / \mathfrak{B}_2) P(d\omega) = \int_B P(A) P(d\omega) = \int_B \chi_A P(d\omega),$$

т. е.

$$P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B).$$

II.6.9. По определению условного математического ожидания имеем для $B \in \mathfrak{B}_1$:

$$\int_B M[M(\xi / \mathfrak{B}_2) / \mathfrak{B}_1] P(d\omega) = \int_B M(\xi / \mathfrak{B}_2) P(d\omega),$$

а так как $B \in \mathfrak{B}_2$, то

$$\int_B M(\xi / \mathfrak{B}_2) P(d\omega) = \int_B \xi P(d\omega)$$

и

$$\int_B \xi P(d\omega) = \int_B M(\xi / \mathfrak{B}_1) P(d\omega).$$

Следовательно, для $B \in \mathfrak{B}_1$ получим

$$\int_B M[M(\xi / \mathfrak{B}_2) / \mathfrak{B}_1] P(d\omega) = \int_B M(\xi / \mathfrak{B}_1) P(d\omega).$$

II.6.10. По определению $M(\eta / \mathfrak{B})$ для $B \in \mathfrak{B}$ имеем

$$\int_B \eta P(d\omega) = \int_B M(\eta / \mathfrak{B}) P(d\omega),$$

т. е.

$$\int \eta \chi_B P(d\omega) = \int M(\eta / \mathfrak{B}) \chi_B P(d\omega),$$

откуда

$$\int \eta \zeta P(d\omega) = \int M(\eta / \mathfrak{B}) \zeta P(d\omega)$$

для любой величины ζ вида

$$\zeta = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{B_k}, \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad B_k \in \mathfrak{B}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Теперь следует использовать теорему о возможности приближения (сначала неотрицательных) \mathfrak{B} -измеримых функций функциями вида ζ и теорему о предельном переходе под знаком интеграла Лебега.

II.6.11. Следствие двух предыдущих задач.

II.6.12. Нужное равенство выполняется для $M(\xi/\mathfrak{B})$ в силу результата задачи II.6.11. Если же для \mathfrak{B} -измеримой величины ζ

$$M(\xi\eta) = M(\zeta\eta),$$

то при $\eta = \chi_B$, $B \in \mathfrak{B}$ получим

$$\int_B \xi P(d\omega) = \int_B \zeta P(d\omega),$$

т. е. ζ — один из вариантов условного математического ожидания.

II.6.13. При условиях задачи

$$P\{M(\xi_{n+1}/\mathfrak{B}) > M(\xi_n/\mathfrak{B}) > 0\} = 1, \quad n \geq 1,$$

согласно II.6.5. Затем применить теорему Лебега о предельном переходе в равенстве

$$\int_B M(\xi_n/\mathfrak{B}) P(d\omega) = \int_B \xi_n P(d\omega), \quad B \in \mathfrak{B}, \quad n \geq 1.$$

II.6.14. Согласно II.6.5

$$|M(\xi_n/\mathfrak{B}) - M(\xi/\mathfrak{B})| \leq M(|\xi_n - \xi|/\mathfrak{B}), \quad n \geq 1.$$

Поэтому достаточно доказать, что

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} M(|\xi_n - \xi|/\mathfrak{B}) = 0\right\} = 1.$$

Для этого рассмотреть последовательность

$$\{2\eta - \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi|, \quad n \geq 1\}$$

и воспользоваться результатом II.6.13.

II.6.15. Использовать результат задачи II.6.13 для последовательностей

$$\{\xi - \sup_{k \geq n} \xi_k, \quad n \geq 1\}, \quad \{\inf_{k \geq n} \xi_k - \eta, \quad n \geq 1\}.$$

II.6.16. Применить утверждение II.6.13 к последовательности

$$\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k, \quad n \geq 1\right\}.$$

II.6.17. Согласно II.6.5 и II.6.10 нужное равенство справедливо для функции вида

$$g(x, y) = \sum_{k=1}^n a_k(x) b_k(x). \quad (*)$$

Для функции g , удовлетворяющей условию задачи, существует последовательность g_n функций вида $(*)$ и таких, что

$$P\{g_n(\xi, \eta) \rightarrow g(\xi, \eta), \quad n \rightarrow \infty\} = 1.$$

Затем воспользоваться результатом задачи II.6.14.

II.6.18. Следствие II.6.17 и II.6.7.

II.6.19. Положить $B = \Omega$ в формуле (1) этого параграфа.

II.6.20. Перечисленные свойства условных вероятностей — следствия соответствующих свойств условного математического ожидания, так как $\mathbf{P}(A/\mathfrak{B}) = \mathbf{M}(\chi_A/\mathfrak{B})$. Например, равенство 4) — следствие II.6.13, а 5) — следствие II.6.16.

II.6.21. Следствие II.6.7.

II.6.22.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A/\mathfrak{B}_1) = & \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(x+2n\pi) + f(\pi-x+2n\pi)] \right\}^{-1} \times \\ & \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\chi_A(x+2n\pi) f(x+2n\pi) + \chi_A(\pi-x+2n\pi) \times \\ & \times f(\pi-x+2n\pi)]. \end{aligned}$$

II.6.23. Следствие II.6.9.

$$\begin{aligned} \text{II.6.25. } \int_0^{\infty} x dF_B(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} x dF_B(x) \leq \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) [F_B(n+1) - \\ &- F_B(n)] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mathbf{P}\{n \leq \xi < n+1/B\} = \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \times \\ &\times \mathbf{P}\{(n \leq \xi < n+1) \cap B\} \leq \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \mathbf{P}\{n \leq \xi < n+1\} \leq \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \times \\ &\times \int_0^{\infty} (x+1) d\mathbf{P}\{\xi < x\}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\int_{-\infty}^0 |x| dF_B(x) \leq \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \int_{-\infty}^0 (|x|+1) d\mathbf{P}\{\xi < x\}.$$

II.6.26. Справедливо более общее равенство

$$\mathbf{M}[f(\xi)/B] = \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \int_B f(\xi) \mathbf{P}(d\omega)$$

для действительной борелевской функции f с $\mathbf{M}|f(\xi)| < \infty$, или равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF_B(x) = \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \int_B f(\xi(\omega)) \mathbf{P}(d\omega).$$

Это равенство верно для $f = \chi_A$, A — борелевское множество на R :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_A(x) dF_B(x) &= F_B(A) = \tilde{P}(\xi \in A) = \\ &= \frac{P\{(\xi \in A) \cap B\}}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int_B \chi_A(\xi(\omega)) P(d\omega). \end{aligned}$$

Очевидно, что равенство верно и для линейных комбинаций индикаторов. Затем использовать теорему о предельном переходе.

II.6.27. Следствие результата предыдущей задачи.

II.6.28. Для $B = \{\xi > 0\}$ найти

$$F_B(x) = \frac{P\{\xi < x, \xi > 0\}}{P(\xi > 0)} = \left[\int_0^{\infty} f(u) du \right]^{-1} \int_0^x f(u) du.$$

Поэтому

$$M(\xi / (\xi > 0)) = \left[\int_0^{\infty} f(u) du \right]^{-1} \int_0^{\infty} u f(u) du,$$

аналогично

$$M(\xi / (a < \xi < b)) = \left[\int_a^b f(u) du \right]^{-1} \int_a^b u f(u) du.$$

II.6.29. Функция

$$\sum_{n=1}^{\infty} M(\xi / B_n) \chi_{B_n}$$

я-измерима. Вычислить интеграл

$$\int_B \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} M(\xi / B_n) \chi_{B_n} \right\} P(d\omega).$$

См. II.6.26.

II.6.30. Последовательность событий $\{(\nu = n), n \geq 1\}$ — полная группа событий. Поэтому согласно II.6.29:

$$\begin{aligned} M\left(\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} M\left\{\sum_{k=1}^{\nu} \xi_k / (\nu = n)\right\} P(\nu = n) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k / (\nu = n)\right\} P(\nu = n). \end{aligned}$$

Из независимости величины $\sum_{k=1}^n \xi_k$ и события $(\nu = n)$ получаем (II.6.24)

$$M\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k / (\nu = n)\right\} = M\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k\right\} = nM\xi_1.$$

Поэтому

$$\mathbf{M} \left(\sum_{k=1}^v \xi_k \right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \mathbf{M} \xi_1 \mathbf{P} (v = n) = \mathbf{M} v \cdot \mathbf{M} \xi_1,$$

II.6.31. При фиксированном $t \geq 0$ пусть

$$B_k = B_k(t) = \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} \tau_j \leq t < \sum_{j=0}^k \tau_j \right\}.$$

Последовательность $\{B_k, k \geq 1\}$ — полная группа событий. Согласно II.6.29 и II.6.24 имеем

$$\begin{aligned} m(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M} [\xi(t)/B_k] \mathbf{P}(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M} [\xi_k/B_k] \mathbf{P}(B_k) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M} \xi_k \mathbf{P}(B_k) = m. \end{aligned}$$

При вычислении $r(s, t)$ предположим, что $s < t$, и рассмотрим полную группу событий

$$B_{jk} = B_j(s) \cap B_k(t); \quad k, j \geq 1.$$

Как и выше, получаем

$$\begin{aligned} r(s, t) &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \mathbf{M} \{[\xi(s) - m][\xi(t) - m]/B_{jk}\} \mathbf{P}(B_{jk}) = \\ &= \sum_{j,k=1}^{\infty} \mathbf{M} \{(\xi_j - m)(\xi_k - m)/B_{jk}\} \mathbf{P}(B_{jk}) = \sum_{j,k=1}^{\infty} \mathbf{M} \{(\xi_j - m) \times \\ &\times (\xi_k - m)\} \mathbf{P}(B_{jk}) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M} (\xi_j - m)^2 \mathbf{P}(B_{jj}) = \sigma^2 \exp(-\lambda(t-s)), \end{aligned}$$

Таким образом,

$$m(t) = m, \quad r(s, t) = \sigma^2 \exp(-\lambda|t-s|); \quad s, t \in \mathbf{R}.$$

II.6.32. σ -алгебра, порождаемая величиной η , совпадает с σ -алгеброй, порождаемой полной группой событий $(\eta = y_n)$, $n \geq 1$. Согласно II.6.29 с вероятностью 1 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\xi/\eta) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{M}(\xi/\eta = y_n) \chi_{(\eta=y_n)} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{P}\{\eta = y_n\}} \int_{\{\eta=y_n\}} \xi \mathbf{P}(d\omega) \chi_{(\eta=y_n)}. \end{aligned}$$

II.6.33. Следствие II.6.27.

II.6.34. Для выпуклой вниз функции f и точки x_0 существует прямая с угловым коэффициентом λ такая, что

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0), \quad x \in \mathbf{R}.$$

Положим $x_0 = M(\xi/\mathfrak{F})$, $x = \xi$. Тогда

$$f(\xi) \geq f(M(\xi/\mathfrak{F})) + \lambda(\xi - M(\xi/\mathfrak{F})).$$

Перейти к условному математическому ожиданию.

II.6.35. Следствие II.6.6. и II.6.34

$$M|\xi|^r = M[M(|\xi|^r/\mathfrak{F})] \geq M[|M(\xi/\mathfrak{F})|^r].$$

II.6.36. Согласно II.6.34 имеем

$$P\{|M(\xi/\mathfrak{F})|^r \leq M(|\xi|^r/\mathfrak{F})\} = 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\{|M(\xi/\mathfrak{F})|^r > a\}} |M(\xi/\mathfrak{F})|^r P(d\omega) &\leq \int_{\{|M(\xi/\mathfrak{F})|^r > a\}} M(|\xi|^r/\mathfrak{F}) P(d\omega) = \\ &= \int_{\{|M(\xi/\mathfrak{F})|^r > a\}} |\xi|^r P(d\omega). \end{aligned}$$

Последнее равенство выполняется по определению условного математического ожидания величины $|\xi|^r$ потому, что событие $\{|M(\xi/\mathfrak{F})|^r > a\} \in \mathfrak{F}$. Затем согласно неравенству Чебышева,

$$\begin{aligned} P\{|M(\xi/\mathfrak{F})|^r > a\} &\leq \frac{1}{a} M|M(\xi/\mathfrak{F})|^r \leq \\ &\leq \frac{1}{a} M[M(|\xi|^r/\mathfrak{F})] = \frac{1}{a} M|\xi|^r. \end{aligned}$$

II.6.38. Действительно,

$$M[\xi M(\eta/\mathfrak{F})] = M\{M[\xi M(\eta/\mathfrak{F})/\mathfrak{F}]\} = M\{M(\xi/\mathfrak{F}) M(\eta/\mathfrak{F})\}.$$

II.6.39. Действительно, согласно II.6.35, $M[M(\xi/\mathfrak{F})]^2$ существует и

$$\begin{aligned} M(\xi - \eta)^2 &= M[\xi - M(\xi/\mathfrak{F}) + M(\xi/\mathfrak{F}) - \eta]^2 = \\ &= M[\xi - M(\xi/\mathfrak{F})]^2 + M[M(\xi/\mathfrak{F}) - \eta]^2, \end{aligned}$$

так как в силу II.6.10, имеем

$$\begin{aligned} M\{[\xi - M(\xi/\mathfrak{F})][M(\xi/\mathfrak{F}) - \eta]\} &= M\{[M(\xi/\mathfrak{F}) - \eta] \times \\ &\times M[(\xi - M(\xi/\mathfrak{F})/\mathfrak{F})]\} = 0. \end{aligned}$$

II.6.40. Решение этой задачи аналогично решению предыдущей. Величина $M(\xi/\eta)$ всегда есть функция вида $f(\eta)$, этот факт доказываться не будет. С учетом этого факта задача есть следствием предыдущей.

II.6.41. Действительно, согласно II.6.35 имеем

$$M|M(\xi_n/\mathfrak{F})|^r < \infty, \quad n \geq 1; \quad M|M(\xi/\mathfrak{F})|^r < \infty.$$

далее

$$M|M(\xi_n/\mathfrak{F}) - M(\xi/\mathfrak{F})|^r = M|M(\xi_n - \xi/\mathfrak{F})|^r \leq M|\xi_n - \xi|^r.$$

II.6.42. $M(\varphi/\mathfrak{B}) = \frac{1}{n!} \sum \varphi(x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n})$, где суммирование проводится по всем $n!$ подстановкам k_1, k_2, \dots, k_n чисел $1, 2, \dots, n$.

$$\text{а) } \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \text{б) } \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

II.6.43. Следствие II.6.34. Более элементарно доказательство, использующее явный вид $M(\varphi/\mathfrak{B})$ и неравенство Коши.

II.6.44. Следствие II.6.10. II.6.45. Следствие II.6.7. II.6.46. Следствие II.6.9.

II.6.47. Доказать, что

$$P\{M(\xi_k/\bar{\xi}) = M(\xi_1/\bar{\xi})\} = 1, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Поэтому

$$M(\xi_k/\bar{\xi}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(\xi_i/\bar{\xi}) = M(\bar{\xi}/\bar{\xi}) = \bar{\xi}$$

с вероятностью 1. Условие независимости можно обобщить так: функция

$$F(x_1, \dots, x_n) = P\{\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n\}$$

симметричная своих аргументов.

II.6.49. Первое равенство равносильно равенству $\varphi(R) = M\xi$. Пусть \mathfrak{B} — σ -алгебра, порождаемая величиной η . Для доказательства второго равенства нужно доказать, что

$$\int_B g(\eta) P(d\omega) = \int_B M(\xi/\eta) P(d\omega), \quad B \in \mathfrak{B}$$

или

$$\int_B g(\eta) P(d\omega) = \int_B \xi \cdot P(d\omega).$$

Пусть $C \in S$ таково, что $\eta^{-1}(C) = B$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_B g(\eta) P(d\omega) &= \int_{\{\eta \in C\}} g(\eta) P(d\omega) = \int_C g(y) dF(y) = \varphi(C) = \\ &= \int_{\{\eta \in C\}} \xi P(d\omega) = \int_B \xi \cdot P(d\omega). \end{aligned}$$

II.6.50. Действительно, с обозначениями предыдущих задач для $C \in S$ имеем:

$$\begin{aligned} \varphi(C) &= \int_{\{\eta \in C\}} \xi P(d\omega) = \iint_{\{y \in C\}} xf(x, y) dx dy = \\ &= \int_C \left[\int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx \right] dy = \int_C \left[\frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} xf(x, y) dx \right] f_2(y) dy. \end{aligned}$$

Доказательство второго равенства аналогично доказательству первого с заменой ξ на $\chi_{(\xi < x)}$.

$$\text{II.6.51. } P\{\xi < x/y - \Delta y \leq \eta < y + \Delta y\} =$$

$$= \frac{P\{\xi < x, y - \Delta y \leq \eta < y + \Delta y\}}{P\{y - \Delta y \leq \eta < y + \Delta y\}} = \frac{\int_{-\infty}^x \left[\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f(u, v) dv \right] du}{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f_2(v) dv};$$

$$M(\xi/y - \Delta y \leq \eta < y + \Delta y) = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} u \left[\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f(u, v) dv \right] du}{\int_{y-\Delta y}^{y+\Delta y} f_2(v) dv}.$$

$$\text{II.6.53. } M(\xi/\xi + \eta \in B) = \frac{\int_B \left[\int_{-\infty}^{\infty} uf(u, v - u) du \right] dv}{\int_B \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(u, v - u) du \right] dv}.$$

II.6.55. По условию задачи условная плотность распределения величины ξ_n при условии $\xi_{n-1} = y$ равна 1 для $y \leq x \leq y + 1$ и равна 0 при остальных x . Поэтому

$$M(\xi_n/\xi_{n-1} = y) = \int_y^{y+1} x dx = y + \frac{1}{2},$$

$$M(\xi_n/\xi_{n-1}) = \xi_{n-1} + \frac{1}{2}$$

(см. II.6.50). Откуда

$$M\xi_n = M[M(\xi_n/\xi_{n-1})] = M\left(\xi_{n-1} + \frac{1}{2}\right) = M\xi_{n-1} + \frac{1}{2},$$

а так как $M\xi_1 = \frac{1}{2}$, то $M\xi_n = \frac{n}{2}$.

II.6.56.

$$M(\xi_n/\xi_{n-1}) = \frac{1}{2}\xi_{n-1} + \frac{1}{2}$$

и аналогично II.6.55 имеем

$$M\xi_n = \frac{1}{2}M\xi_{n-1} + \frac{1}{2}, \quad M\xi_1 = \frac{1}{2},$$

откуда

$$M\xi_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

II.6.57. Для доказательства 2) сначала можно доказать, что

$$M(\bar{\xi} / \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k) = M(\xi_1 / \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k).$$

После вычисления совместной функции распределения величин $\xi_1, \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k$ использовать результат II.6.50.

II.6.60. а) Рассмотреть соответствующие условные плотности.
б) Использовать а) и результат II.6.59,

$$M(\xi^2 / \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x/y) dx.$$

II.6.61. Утверждение легко доказать с помощью условных плотностей, если величины $\xi_n, n \geq 1$ имеют положительную плотность. Без этого предположения возможен иной подход: пусть g и h — действительные борелевские функции на \mathbf{R} . По определению (см. II.6.48) $M\{g(\eta_k) h(\eta_m) / \eta_n = y\}$ имеем для любого борелевского множества $C \subset \mathbf{R}$

$$\int_{\{\eta_n \in C\}} g(\eta_k) h(\eta_m) P(d\omega) = \int_C M\{g(\eta_k) h(\eta_m) / \eta_n = y\} dF(y)$$

с функцией распределения F величины η_n . Пусть \mathfrak{B} — σ -алгебра, порождаемая величинами η_k и η_n . Согласно II.6.18 и II.6.10 имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\{\eta_n \in C\}} g(\eta_k) h(\eta_m) P(d\omega) &= M[\chi_{(\eta_n \in C)} g(\eta_k) h(\eta_m)] = \\ &= M\{M[\chi_{(\eta_n \in C)} \cdot g(\eta_k) h(\eta_m) / \mathfrak{B}]\} = M\{\chi_{(\eta_n \in C)} \cdot g(\eta_k) \times \\ &\times [Mh(y + \xi_{n+1} + \dots + \xi_m)]|_{y=\eta_n}\} = M\{\chi_{(\eta_n \in C)} \cdot M(g(\eta_k) / \eta_n) \times \\ &\times M(h(\eta_m) / \eta_n)\} = \int_C M(g(\eta_k) / \eta_n = y) \cdot M(h(\eta_m) / \eta_n = y) dF(y). \end{aligned}$$

II.6.62. Следствие определения условного математического ожидания.

II.6.63. События

$$A_k = \{M(|\xi| / \mathfrak{B}_j) < \alpha, 1 \leq j < k; M(|\xi| / \mathfrak{B}_k) \geq \alpha\}, 1 \leq k \leq m,$$

попарно несовместны, причем $A_k \in \mathfrak{B}_k$. Поэтому

$$\begin{aligned} P(A) &= \sum_{k=1}^m P(A_k) = \sum_{k=1}^m \int_{A_k} P(d\omega) \leq \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m \int_{A_k} M(|\xi| / \mathfrak{B}_k) P(d\omega) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \sum_{k=1}^m \int_{A_k} |\xi| P(d\omega) \leq \frac{1}{\alpha} M|\xi|, \quad A = \bigcup_{k=1}^m A_k. \end{aligned}$$

II.6.64. Доказать, что η - \mathfrak{B} -измерима, и проверить равенство

$$\int_B \eta P(d\omega) = \int_B M(\xi/\mathfrak{B}) P(d\omega) = \int_B \xi P(d\omega), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

II.6.65. Достаточно доказать для \mathfrak{B} -измеримой величины ξ с $M|\xi| < \infty$ соотношение

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi/\mathfrak{B}_n) = \xi\right\} = 1,$$

так как согласно II.6.9,

$$M(\xi/\mathfrak{B}_n) = M[M(\xi/\mathfrak{B})/\mathfrak{B}_n], \quad n \geq 1.$$

Для заданного $\varepsilon > 0$ пусть k такое, что существует \mathfrak{B}_k -измеримая величина ξ_ε с $M|\xi - \xi_\varepsilon| < \varepsilon$. При $n \geq k$ $P\{M(\xi_\varepsilon/\mathfrak{B}_n) = \xi_\varepsilon\} = 1$, поэтому с вероятностью 1

$$|M(\xi/\mathfrak{B}_n) - \xi| \leq |M[(\xi - \xi_\varepsilon)/\mathfrak{B}_n]| + |\xi_\varepsilon - \xi|,$$

откуда для любого $\alpha > 0$ получаем

$$\begin{aligned} P\left\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |M(\xi/\mathfrak{B}_n) - \xi| \geq \alpha\right\} &\leq P\left\{\sup_{n \geq k} |M[(\xi - \xi_\varepsilon)/\mathfrak{B}_n]| + \right. \\ &\quad \left. + |\xi_\varepsilon - \xi| \geq \alpha\right\} \leq \frac{2}{\alpha} M|\xi - \xi_\varepsilon| \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha}. \end{aligned}$$

Глава III

§ 1

III.1.1. а) $P(A) = 0$ или $P(B) = 1$; б) $P(A) = 0$ или $P(B) = 0$; в) $P(A) = 0$ или $P(A) = 1$.

III.1.2. а) независимы; б) независимы при $a < \frac{1}{2}$ и $b = 1 - a$;

в) не образуют независимого набора, хотя попарно независимы.

III.1.3. При каждом $n \geq 1$ A_n есть объединение 2^{n-1} попарно непересекающихся интервалов $I(n, k)$; $k = 0, 1, \dots, 2^{n-1} - 1$ длины 2^{-n} каждый. Если $m < n$, то интервал

$$I(m, k) = \left[\frac{2k}{2^m}, \frac{2k+1}{2^m}\right] = \left[\frac{2 \cdot 2^{n-m} \cdot k}{2^n}, \frac{(2k+1) 2^{n-m}}{2^n}\right]$$

пересекается с 2^{n-m-1} интервалами вида $I(n, i)$. Поэтому длина $A_m \cap A_n$ равна

$$2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-m-1} = \frac{1}{4},$$

следовательно,

$$P(A_m \cap A_n) = \frac{1}{4} = P(A_m) \cdot P(A_n).$$

Аналогично доказывается, что

$$P(A_{n_1} \cap A_{n_2} \cap \dots \cap A_{n_s}) = \frac{1}{2^s}$$

для любых $n_1 < n_2 < \dots < n_s$, $s \geq 1$.

$$\text{III.1.4. а) } \prod_{i=1}^n (1 - p_i);$$

$$\text{б) } \sum_{1 \leq i(1) < i(2) < \dots < i(m) \leq n} \prod_{k=1}^m p_{i(k)} \prod_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i(k), 1 \leq k \leq m}} (1 - p_j)$$

III.1.5. Пусть A_k — событие, состоящее в том, что в экспериментах с номерами $k, k+1, \dots, k+4$ произойдут «успехи». Очевидно, что $P(A_k) = p^5$ при любом $k \geq 1$ и что A_1, A_6, A_{11}, \dots — независимые события. При $p > 0$ из леммы Бореля-Кантелли следует, что нужная вероятность равна 1. Аналогично, произвольная, хотя бы и длинная, фиксированная серия «успехов» и «неудач» с вероятностью 1 повторяется бесконечное число раз, если $0 < p < 1$.

III.1.6. а) Следствие леммы Бореля-Кантелли: если ряд условия задачи сходится, то

$$P\{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} B_k^{(m)}\} = 0;$$

если же ряд условия задачи расходится, то нужно применить вторую часть леммы к последовательностям событий

$$\{B_{2i(1+m)+1}^{(m)}, i \geq 0\}, \{B_{2i(m+1)-m}^{(m)}, i \geq 1\}.$$

б) Следствие а): если ряд из а) расходится при всех m , то

$$P\{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} B_k^{(m)}\} = 1, m \geq 1,$$

и первый случай имеет место, так как пересечение последовательности событий вероятности 1 имеет вероятность 1. Во втором случае использовать соотношение

$$P\{\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} B_k^{(m)}\} = \lim_{n \rightarrow \infty} P\{\bigcup_{k=n}^{\infty} B_k^{(m)}\} = 0$$

и дополнительное условие.

$$\text{III.1.7. } \prod_{n=1}^{\infty} (1 - p_n) = 0.$$

Величина v принимает натуральные значения с вероятностями

$$P\{v = 1\} = p_1, \quad P\{v = n\} = \prod_{k=1}^{n-1} (1 - p_k) p_n, \quad n \geq 2;$$

распределение величины v есть обобщение геометрического распределения.

III.1.8. Из леммы Бореля—Кантелли следует, что с вероятностью 1 происходит бесконечное число событий из A_n , $n \geq 1$. Поэтому величины v_k , $k \geq 1$, с вероятностью 1 принимают конечные значения.

а) Вероятность

$$P\{v_{k+1} - v_k = m/v_k = n\} = P\{v_1 = m\}$$

не зависит от n

б) Использовать а) и аналогично доказать, что

$$P\left\{\bigcap_{k=1}^N B_k^{(m_k)}\right\} = P\left\{\bigcap_{k=1}^{N-1} B_k^{(m_k)}\right\} \cdot P\{v_1 = m_N\}.$$

III.1.9. б) Положить

$$B = \bigcap_{k=m}^{\infty} \bar{A}_k, \quad m \geq 1,$$

использовать правила де Моргана.

III.1.10. Следствие леммы Бореля—Кантелли: если происходит событие A , то происходит только конечное число событий из A_n , $n \geq 1$.

III.1.11. $P(A) = 0$.

III.1.12. Пусть $\alpha_n = \chi_{A_n}$, очевидно

$$M\alpha_n = P(A_n), \quad M(\alpha_m \alpha_n) = P(A_m A_n),$$

$$D\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right) = M\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right)^2 - \left[M\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k\right)\right]^2 = \sum_{j,k=1}^n P(A_j A_k) - \left[\sum_{k=1}^n P(A_k)\right]^2.$$

Согласно неравенству Чебышева

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^n \alpha_k - \sum_{k=1}^n P(A_k)\right| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(A_k)\right\} \leq 4 \left\{ \frac{\sum_{j,k=1}^n P(A_j A_k)}{\left[\sum_{k=1}^n P(A_k)\right]^2} - 1 \right\}.$$

Положим

$$d_n = P\left\{\sum_{k=1}^n \alpha_k < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n P(A_k)\right\}.$$

Согласно предыдущему $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$, поэтому существует возрастающая

последовательность натуральных чисел $\{n(k), k \geq 1\}$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_{n(k)} < \infty.$$

По лемме Бореля—Кантелли с вероятностью 1 происходит только конечное число событий

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n(m)} \alpha_k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n(m)} P(A_k) \right\}, \quad m \geq 1,$$

или происходят все события

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n(m)} \alpha_k > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n(m)} P(A_k) \right\}, \quad m \geq 1,$$

исключая конечное число. Отсюда и из условия задачи следует расходимость с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

III.1.13. Следствие предыдущей задачи. Отличается от леммы Бореля—Кантелли тем, что требуется только попарная независимость событий.

§ 2

III.2.2. Для доказательства независимости \mathfrak{A}_1 и \mathfrak{A}_2 рассмотреть класс \mathfrak{B}_1 событий из \mathfrak{A}_1 таких, что

$$P\{A \cdot (\xi_2 < c)\} = P(A) \cdot P(\xi_2 < c), \quad A \in \mathfrak{B}_1, \quad c \in R.$$

Показать, что $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{B}_1$. В случае n σ -алгебр рассуждения аналогичны.

III.2.3. σ -алгебра событий

$$\{(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \in B_n\}, \quad B_n \in \mathfrak{B}_n\}$$

порождается классом событий

$$\left\{ \bigcap_{k=1}^n (\xi_k \in C_k); \quad C_k \in \mathfrak{B}_1, \quad 1 \leq k \leq n \right\},$$

где \mathfrak{B}_n — борелевская σ -алгебра подмножеств R^n .

III.2.4. Следствие закона 0 и 1. Например, для величины $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n$ при любом $c \in R$ событие

$$\left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n \geq c \right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\xi_k \geq c\}$$

принадлежит остаточной σ -алгебре последовательности $\{\mathfrak{A}_n, n \geq 1\}$, \mathfrak{A}_n — σ -алгебра, порождаемая величиной ξ_n ; $n \geq 1$. Далее воспользоваться таким замечанием. Пусть $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ — вероятностное

пространство такое, что для любого $A \in \mathfrak{M}$ $P(A) = 0$ либо $P(A) = 1$. Пусть ξ — \mathfrak{M} -измеримая величина. Тогда ξ с вероятностью 1 постоянна. Для доказательства рассмотреть события $\{\xi < r\}$, r — рационально.

III.2.5—III.2.7. Следствие закона 0 и 1, доказать измеримость величин относительно остаточной σ -алгебры, далее см. III.2.4.

III.2.9. Использовать лемму Бореля—Кантелли и то, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| > cn\}$$

расходится. Расходимость ряда можно доказать так: предположим, что ряд сходится. Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| > cn\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_1| > cn\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=n}^{\infty} P\left\{m+1 \geq \frac{1}{c} |\xi_1| > m\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} n P\left\{n+1 \geq \frac{1}{c} |\xi_1| > \right. \\ &\quad \left. > n\right\} \geq \frac{1}{c} \int_{(|x| > c)} (|x| - c) dF(x), \end{aligned}$$

где F — функция распределения ξ_1 . Однако, по предположению $M|\xi_1| = +\infty$.

III.2.10. Применить лемму Бореля—Кантелли к последовательности событий $\{|\xi_n|^\alpha > cn\}$, $n \geq 1$, и воспользоваться тем, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi| > n\}$$

и $M|\xi|$ конечны одновременно.

III.2.11. Решается аналогично задаче III.2.10.

III.2.12. Нужно доказать, что существует такое число $c > 0$, для которого с вероятностью 1 неравенство $\xi_n > c \ln n$ выполняется только для конечного числа значений n . Иными словами, нужно доказать, что

$$P\{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n\} = 0,$$

где $A_n = \{\xi_n > c \ln n\}$, $n \geq 1$. Для $P(A_n)$ имеем $P(A_n) = P\{\xi_n > c \ln n\} = \lambda \int_{c \ln n}^{\infty} e^{-\lambda u} du = n^{-\lambda c}$, где λ , $\lambda > 0$, — параметр распределения. Возьмем c таким, чтобы $\lambda c > 1$, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty.$$

III.2.13. См. решение предыдущей задачи.

III.2.14. Для доказательства равенства $P\{\eta < x\} = x$, $x \in [0, 1]$ рассмотрим двоичное разложение числа

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}$$

(рассматриваются разложения, которые не содержат 1 в периоде). Каждое из чисел $\{a_n\}$ равно 0 или 1. По определению неравенства действительных чисел событие $\{\eta < x\}$ есть объединение попарно несовместимых событий

$$\{\xi_1 < a_1\}, \{\xi_1 = a_1, \xi_2 < a_2\}, \{\xi_1 = a_1, \xi_2 = a_2, \xi_3 < a_3\}, \dots$$

Поэтому

$$P\{\eta < x\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_1 = a_1, \dots, \xi_{n-1} = a_{n-1}, \xi_n < a_n\}.$$

Из независимости величин ξ_n , $n \geq 1$, вытекает также, что

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 = a_1, \dots, \xi_{n-1} = a_{n-1}, \xi_n < a_n\} &= \\ &= P\{\xi_1 = a_1\} P\{\xi_2 = a_2\} \dots P\{\xi_{n-1} = a_{n-1}\} \times \\ &\times P\{\xi_n < a_n\} = a_n \cdot \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$P\{\eta < x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n} = x.$$

III.2.15. 0. I способ. По лемме Бореля—Кантелли произвольная фиксированная конечная последовательность результатов экспериментов с вероятностью 1 произойдет бесконечное число раз (см. задачу III.1.5).

II способ. Доказать, что η имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, см. III.2.14.

III.2.16. Величина x имеет равномерное распределение на $[0, 1]$, можно считать — на $[0, 1)$, так как $P\{x = 1\} = 0$, вероятности других событий не изменятся. При каждом целом i , $1 \leq i \leq 9$, $P\{\xi_1 = i\} = \frac{1}{10}$, так как $\xi_1 = i$ тогда и только тогда, когда x попадает

в интервал $\left[\frac{i}{10}, \frac{i+1}{10}\right)$ длиной $\frac{1}{10}$. Аналогично, $P\{\xi_k = i\} = \frac{1}{10}$, так как $\xi_k = i$ тогда и только тогда, когда x попадет в интервал $I(m_1, \dots, m_{k-1}, i)$

$$\left[\frac{m_1}{10} + \frac{m_2}{10^2} + \dots + \frac{m_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{i}{10^k}, \frac{m_1}{10} + \dots + \frac{m_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{i+1}{10^k}\right).$$

Каждое из чисел m_1, m_2, \dots, m_{k-1} принимает значения $0, 1, \dots, 9$. Эти интервалы не пересекаются, каждый из них имеет длину 10^{-k} , число таких интервалов 10^{k-1} . Поэтому вероятность попасть на один из них равна 10^{-1} . Для доказательства независимости ξ_k и ξ_r нужно установить равенство

$$\mathbf{P} \{ \xi_k = i, \xi_r = j \} = \mathbf{P} \{ \xi_k = i \} \mathbf{P} \{ \xi_r = j \} = 10^{-2}.$$

Аналогично предыдущему, $\mathbf{P} \{ \xi_k = i, \xi_r = j \}$ — вероятность попасть в одно из пересечений

$$I(m_1, \dots, m_{k-1}, i) \cap I(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{r-1}, j)$$

Эти пересечения при $k < r$ имеют длину 10^{-r} или пусты; число непустых равно 10^{r-2} , так как с каждым интервалом $I(m_1, \dots, m_{k-1}, i)$ пересекается только 10^{-k-1+r} интервалов второго вида $I(\bar{m}_1, \dots, \bar{m}_{r-1}, j)$. Поэтому $\mathbf{P} \{ \xi_k = i, \xi_r = j \} = 10^{-2}$. Аналогично, при $k_1 < k_2 < \dots < k_s$

$$\mathbf{P} \{ \xi_{k_1} = i_1, \xi_{k_2} = i_2, \dots, \xi_{k_r} = i_r \} = 10^{-r}.$$

III.2.17. Используя независимость, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \max_{1 \leq k \leq n} \xi_k < x \right\} &= \mathbf{P} \{ \xi_1 < nx, \dots, \xi_n < nx \} = \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbf{P} \{ \xi_k < nx \} = \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{nx} \frac{du}{1+u^2} \right)^n. \end{aligned}$$

Нужный результат получим после перехода к пределу.

III.2.18. Математическое ожидание величины

$$\eta_n = \max_{1 \leq k \leq n} |\xi_k|$$

конечно при каждом $n \geq 1$. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \eta_n \geq x \} &= \mathbf{P} \left\{ \bigcup_{k=1}^n (|\xi_k| \geq x) \right\} \leq \\ &\leq n [1 - F(x)], \end{aligned}$$

где $F(x) = \mathbf{P} \{ |\xi_n| < x \}$, $x > 0$. Отсюда

$$\frac{1}{n} \mathbf{M} \eta_n \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{P} \{ \eta_n \geq k \} \leq \sum_{k=1}^{\infty} [1 - F(k)] < \infty,$$

так как $\mathbf{M} |\xi_n| < \infty$. Таким образом, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \mathbf{P} \{ \eta_n \geq k \}$$

сходится равномерно относительно n и при $n \rightarrow \infty$ получаем требуемое.

III.2.19. Достаточно доказать, что для некоторого $a > 0$

$$\int_a^{\infty} [1 - P\{\eta < x\}] dx < \infty.$$

Из неравенства

$$\begin{aligned} \prod_{n=1}^N P\{|\xi_n| < x\} &= \prod_{n=1}^N [1 - P\{|\xi_n| \geq x\}] \geq \\ &\geq 1 - \sum_{n=1}^N P\{|\xi_n| \geq x\} \end{aligned}$$

и неравенства Чебышева имеем

$$\prod_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| < x\} \geq 1 - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2.$$

Независимость величины ξ_n , $n \geq 1$, и непрерывность вероятности приводят к неравенству

$$P\{\eta < x\} \geq 1 - \frac{1}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2,$$

откуда и следует нужное утверждение.

III.2.20. Использовать формулу

$$M\eta_v = \sum_{n=1}^{\infty} M\{\eta_v/v = n\} P\{v = n\}$$

и аналогичную формулу для $M\eta_v^2$.

О т в е т. $M\eta_v = Mv \cdot M\xi_1$,

$$D\eta_v = (M\xi_1)^2 Dv + Mv \cdot D\xi_1.$$

III.2.21. Величина v определяется так:

$$v = \begin{cases} 2, & \xi_2 > \xi_1; \\ k, & \xi_k > \xi_1, \xi_j \leq \xi_1, 2 \leq j \leq k-1; k \geq 3; \\ +\infty, & \xi_n \leq \xi_1, n \geq 2. \end{cases}$$

Хотя определение распределения величины v на первый взгляд представляется трудным, оно не требует вычислений. Вероятность

$$P\{v > n\} = P\{\xi_2 \leq \xi_1, \xi_3 \leq \xi_1, \dots, \xi_n \leq \xi_1\}$$

есть вероятность того, что среди n независимых одинаково распределенных величин первая будет наибольшей. Из того, что совместное распределение величин $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ совпадает с совместным

распределением величин $\xi_2, \xi_1, \dots, \xi_n$ (использованы независимость, одинаковая распределенность и непрерывность) следует, что

$$\begin{aligned} & P\{\xi_2 < \xi_1, \xi_3 < \xi_1, \dots, \xi_n < \xi_1\} = \\ & = P\{\xi_1 < \xi_2, \xi_3 < \xi_2, \dots, \xi_n < \xi_2\}. \end{aligned}$$

Поэтому равны следующие n чисел

$$P\{\xi_i < \xi_k, i \neq k, 1 \leq i \leq n\}, k = 1, 2, \dots, n.$$

Одна из величин всегда является наибольшей. Поэтому $P\{v > n\} = n^{-1}$. Очевидно,

$$P\{v = n\} = P\{v > n-1\} - P\{v > n\} = \frac{1}{(n-1)n}, n \geq 2.$$

Отметим, что $P\{v = +\infty\} = 0$, т. к.

$$\sum_{n=2}^{\infty} P\{v = n\} = 1$$

и что $Mv = +\infty$.

III.2.22. Аналогично III.2.21.

III.2.23. Величина v определяется равенством

$$v = \begin{cases} n, & \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{n-1} \leq 1 \text{ и } \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n > 1; \\ +\infty, & \xi_1 + \dots + \xi_n \leq 1, n \geq 1. \end{cases}$$

Отметим, что

$$\{v = n\} = \{\xi_1 + \dots + \xi_{n-1} \leq 1\} \setminus \{\xi_1 + \dots + \xi_n \leq 1\},$$

причем

$$\{\xi_1 + \dots + \xi_n \leq 1\} \subset \{\xi_1 + \dots + \xi_{n-1} \leq 1\}.$$

Поэтому при $n \geq 2$

$$P\{v = n\} = P\{\xi_1 + \dots + \xi_{n-1} \leq 1\} - P\{\xi_1 + \dots + \xi_n \leq 1\}.$$

Совместная плотность величин ξ_1, \dots, ξ_k равна

$$\lambda^n \exp\{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)\} \text{ при } x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n,$$

поэтому

$$\begin{aligned} P\{\xi_1 + \dots + \xi_n \leq 1\} &= \lambda^n \int_{\substack{x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n \\ x_1 + \dots + x_n \leq 1}} \dots \int \exp\{-\lambda(x_1 + \dots + x_n)\} \times \\ &\times dx_1 \dots dx_n = \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^1 x^{n-1} e^{-\lambda x} dx, n \geq 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} P\{v=n\} &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^1 x^{n-2} e^{-\lambda x} dx - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^1 x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \\ &= \frac{\lambda^{n-1}}{(n-2)!} \int_0^1 x^{n-2} e^{-\lambda x} dx - \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \left[-x^{n-1} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \right]_0^1 + \\ &\quad + \int_0^1 \frac{n-1}{\lambda} x^{n-2} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda}. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$P\{v=1\} = P\{\xi_1 > 1\} = e^{-\lambda}.$$

Таким образом, v имеет распределение Пуассона с параметром λ .

III.2.24. Величина ξ_v определяется так:

$$\xi_v = \begin{cases} \xi_n, & \xi_1 + \dots + \xi_{n-1} \leq 1, \xi_1 + \dots + \xi_n > 1, \xi_0 = 0; \\ +\infty, & \xi_1 + \dots + \xi_n \leq 1, n \geq 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P\{\xi_v < x\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_v < x, v=n\} = \\ &= P\{1 < \xi_1 < x\} + \sum_{n=2}^{\infty} P\{\xi_n < x, \sum_{i=1}^{n-1} \xi_i \leq 1 < \sum_{i=1}^n \xi_i\}. \end{aligned}$$

Пусть

$$g_{n-1}(x) = \frac{(\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0; \quad n > 1,$$

плотность распределения суммы $\xi_1 + \dots + \xi_{n-1}$. С учетом независимости величин $\eta = \xi_1 + \dots + \xi_{n-1}$ и ξ_n при $n > 1$ имеем для $x < 1$

$$\begin{aligned} P\{\xi_n < x, \eta \leq 1, \eta + \xi_n > 1\} &= \int_{1-x}^1 g_{n-1}(u) \int_{1-u}^x \lambda e^{-\lambda v} dv du = \\ &= \int_{1-x}^1 g_{n-1}(u) [e^{-\lambda(1-u)} - e^{-\lambda x}] du, \end{aligned}$$

для $n=1$ $P\{1 < \xi_1 < x\} = 0$. Отметим, что

$$\sum_{n=2}^{\infty} g_{n-1}(x) = \lambda, \quad x > 0,$$

$$P\{\xi_v < x\} = \int_{1-x}^1 \lambda [e^{-\lambda(1-u)} - e^{-\lambda x}] du = 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}.$$

Пусть теперь $x > 1$. В этом случае

$$\begin{aligned} P\{1 < \xi_1 < x\} &= e^{-\lambda} - e^{-\lambda x}, \\ P\{\xi_n < x, \eta \leq 1 < \eta + \xi_n\} &= \int_0^1 g_{n-1}(u) [e^{-\lambda(1-u)} - e^{-\lambda x}] du, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} P\{\xi_v < x\} &= e^{-\lambda} - e^{-\lambda x} + \int_0^1 \lambda [e^{-\lambda(1-u)} - e^{-\lambda x}] du = \\ &= 1 - e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Окончательно имеем

$$P\{\xi_v < x\} = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x}, & x \leq 1, \\ 1 - e^{-\lambda x} - \lambda e^{-\lambda x}, & x > 1. \end{cases}$$

Таким образом, распределение ξ_v отличается от распределения величин ξ_n , $n \geq 1$. Легко проверить, что $M\xi_v = 2M\xi_1$.

III.2.25. Случайная величина v принимает натуральные значения, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{v = n\} = 1.$$

Действительно,

$$\{v = n\} = \{\xi_1 + \dots + \xi_{n-1} < 1, \xi_1 + \dots + \xi_n \geq 1\},$$

причем события эти несовместимы при разных n . Поэтому

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{n=1}^{\infty} P\{v = n\} &= 1 - P\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} \{v = n\}\right\} = \\ &= P\{\xi_1 + \dots + \xi_n < 1, n \geq 1\}. \end{aligned}$$

Пусть n_0 такое, что $n_0 M\xi_1 > 1$, $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned} P\{S_n < 1, n \geq 1\} &= P\{S_n - MS_n < 1 - MS_n, n \geq 1\} \leq \\ &\leq P\{|S_{n_2} - MS_{n_2}| > MS_{n_2} - 1, n \geq n_0\}. \end{aligned}$$

Из неравенства Чебышева следует

$$P\{|S_{n_2} - MS_{n_2}| > MS_{n_2} - 1\} \leq \frac{n^2 D\xi_1}{(n^2 M\xi_1 - 1)^2}.$$

Поэтому согласно лемме Бореля—Кантелли бесконечно много событий последовательности

$$\{|S_{n_2} - MS_{n_2}| > MS_{n_2} - 1\}, \quad n \geq n_0,$$

происходит с вероятностью 0, тем более

$$P\{S_n < 1, n \geq 1\} = 0.$$

Для произвольных x и y и при фиксированном $k \geq 1$ рассмотрим вероятность

$$\begin{aligned} P\{\xi_v < x, \xi_{v+k} < y\} &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_v < x, \xi_{v+k} < y, v = n\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_n < x, \xi_{n+k} < y, S_{n-1} < 1, S_n \geq 1\}. \end{aligned}$$

Так как величины $\xi_k, k \geq 1$, независимы и одинаково распределены, то

$$\begin{aligned} P\{\xi_v < x, \xi_{v+k} < y\} &= \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_n < x, S_{n-1} < 1, S_n \geq 1\} P\{\xi_{n+k} < y\} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P\{\xi_v < x, v = n\} P\{\xi_1 < y\} = P\{\xi_v < x\} P\{\xi_1 < y\}. \end{aligned}$$

При $x \rightarrow \infty$ имеем

$$P\{\xi_{v+k} < y\} = P\{\xi_1 < y\}.$$

Таким образом, случайные величины ξ_v и ξ_{v+k} независимы, причем величина ξ_{v+k} имеет такое же распределение как и ξ_1 . Легко показать также, что $\{\xi_{v+k}, k \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин. Отметим, что распределение ξ_v не совпадает с распределением ξ_1 .

III.2.26. Пусть $F_n(x) = P\{S_n < x\}$. С помощью метода математической индукции доказать, что

$$F_n(x) = \frac{x^n}{n!}, \quad 0 \leq x \leq 1; \quad n \geq 1.$$

Далее

$$P\{v = n\} = P\{S_{n-1} < 1, S_n > 1\} = \int_0^1 y dF_{n-1}(y) = \frac{1}{n} \frac{1}{(n-2)!}.$$

III.2.27. Математическое ожидание, которое нужно оценить, есть сумма n^{2r} слагаемых вида

$$M(\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_{2r}})$$

Если один из индексов, например i_1 , отличен от остальных, то величина ξ_{i_1} не зависит от оставшихся сомножителей и такое слагаемое равно 0. Таким образом, отличны от 0 не более $n^r C_{2r}^r$ слагаемых вида

$$M(\xi_{i_1}^2 \xi_{i_2}^2 \dots \xi_{i_r}^2),$$

причем каждое такое слагаемое не превосходит величины $(1 + M\xi_1^{2r})^r$.

III.2.29. Нужно доказать, что

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |S_n| = +\infty \right\} = 1.$$

Из III.2.9 следует, что для любого $c > 0$ с вероятностью 1 происходит бесконечно много событий из последовательности $\{|\xi_n| > cn\}$, $n \geq 1$. Однако, если для некоторого n происходит событие

$$\{|\xi_n| > cn\} = \{|S_n - S_{n-1}| > cn\},$$

то происходит хотя бы одно из событий

$$\left\{ |S_n| > \frac{1}{2} cn \right\},$$

$$\left\{ |S_{n-1}| > \frac{1}{2} cn \right\} = \left\{ |S_{n-1}| > \frac{c}{2} \frac{n}{n-1} (n-1) \right\}$$

или хотя бы одно из событий

$$\left\{ |S_n| > \frac{1}{2} cn \right\}, \left\{ |S_{n-1}| > \frac{1}{2} c(n-1) \right\}.$$

Таким образом, с вероятностью 1 для каждого c происходит бесконечно много событий последовательности

$$\{|S_n| > cn\}, \quad n \geq 1.$$

Поэтому

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |S_n| \geq c \right\} = 1.$$

III.2.30. Отметим, что $\mathbf{M} |\xi_1| = +\infty$. Величина

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$$

при каждом $n \geq 1$ имеет такое же распределение, как и величина ξ_1 . Поэтому

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \delta > 0, \quad A_n = \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k > c \right\}, \quad c > 0.$$

Откуда

$$\mathbf{P} \left\{ \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m \right\} \geq \delta, \quad n \geq 1,$$

и

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right\} \geq \delta.$$

В силу закона 0 и 1 величина

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k$$

постоянная с вероятностью 1. Поэтому

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n = +\infty \right\} = 1,$$

очевидно также, что

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} S_n = -\infty \right\} = 1.$$

III.2.31. Для события A_n (см. решение III.2.30) имеем

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{1}{\pi} \int_c^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \leq \frac{1}{\pi c},$$

откуда

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^n \xi_k > c \right\} \leq \frac{1}{\pi c n^\alpha}.$$

По лемме Бореля—Кантелли для каждого $c > 0$ с вероятностью 1 происходит только конечное число событий последовательности

$$\left\{ \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^n \xi_k > c \right\}, \quad n \geq 1.$$

Следовательно,

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^n \xi_k \leq c \right\} = 1.$$

Так как $c > 0$ — произвольно, то

$$\mathbf{P} \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^n \xi_k \leq 0 \right\} = 1.$$

Очевидно, что и

$$\mathbf{P} \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^n \xi_k \geq 0 \right\} = 1.$$

III.2.32. Множество всюду плотно, если его пересечение с любым открытым интервалом не пусто. Достаточно рассмотреть интервалы с рациональными концами. Вероятность того, что ни один член последовательности не попадет в такой интервал, равна 0.

§ 3

III.3.1. Множество точек сходимости $(k\xi)$:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \left\{ \omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

III.3.2. Согласно критерию Коши множество точек сходимости совпадает с множеством точек фундаментальности последовательности $\{\xi_n(\omega), n \geq 1\}$:

$$\begin{aligned} & \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{m=N}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ \omega : |\xi_m(\omega) - \xi_n(\omega)| < \frac{1}{k} \right\} = \\ & = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \left\{ \omega : |\xi_{m+n}(\omega) - \xi_n(\omega)| < \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned}$$

III.3.3. Использовать III.3.1 и то, что последовательность множеств

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \frac{1}{k} \right\}, \quad k \geq 1,$$

монотонно возрастает.

III.3.4. Нужное утверждение следует из равенства

$$\mathbf{P} \left\{ \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{N=1}^{\infty} \bigcup_{n=N}^{\infty} \left\{ \omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \geq \frac{1}{k} \right\} \right\} = 0 \quad (*)$$

и непрерывности вероятности, если $\mathbf{P} \{ \xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty \} = 1$.

Если условие задачи выполнено, то (*) следует из счетной полуаддитивности вероятности.

III.3.5. Заметим, что

$$\begin{aligned} & \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ \omega : |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k} \right\} = \\ & = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left(\left\{ \omega : |\eta_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k} \right\} \cup \right. \\ & \quad \left. \cup \left(A_n \cap \left\{ |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| < \frac{1}{k} \right\} \right) \right), \end{aligned}$$

причем $A_n = \{ \eta_n \neq \xi_n \}$, $\mathbf{P}(A_n) = 0$, $n \geq 1$. Отсюда

$$\mathbf{P} \{ \xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty \} = \mathbf{P} \{ \eta_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty \} = 1.$$

Кроме того, пересечение двух множеств вероятности 1 имеет вероятность 1.

III.3.6. Пересечение конечного числа множеств вероятности 1 имеет вероятность 1.

III.3.7. а) Имеем для $\varepsilon > 0$:

$$\mathbf{P} \{ \xi_n > \varepsilon \} \leq 2^{-\lceil \log_2 n \rceil} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty;$$

$$\text{б) } \bigcup_{n=N}^{\infty} \{ \xi_n > \varepsilon \} \supset \bigcup_{n=2^m}^{2^{m+1}-1} A_n = [0, 1], \quad 2^m > N.$$

См. III.3.4. Для подпоследовательности $\{\xi_{2^n}, n \geq 1\}$ имеем

$$\mathbf{P} \left\{ \bigcup_{n=N}^{\infty} \{ \xi_{2^n} > \varepsilon \} \right\} \leq 2^{-N} \rightarrow 0, \quad N \rightarrow \infty.$$

III.3.8. Следует из III.3.3 и III.3.4.

III.3.9. См. III.3.4.

III.3.10. Из условия следует, что

$$P \left\{ \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} \{ \omega : |\xi_{n+1}(\omega) - \xi_n(\omega)| > \varepsilon_n \} \right\} = 0,$$

поэтому множество

$$\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcap_{n=m}^{\infty} \{ \omega : |\xi_{n+1}(\omega) - \xi_n(\omega)| \leq \varepsilon_n \}$$

имеет вероятность 1. Проверить, что это множество есть множество всех тех точек ω , для которых последовательность $\{\xi_n(\omega), n \geq 1\}$ фундаментальна.

III.3.11. С учетом III.3.9 достаточно доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} P \{ |\xi_n| > \varepsilon \} < +\infty, \varepsilon > 0.$$

Сходимость этого ряда следует из неравенства Чебышева

$$P \{ |\xi_n| > \varepsilon \} \leq \frac{M |\xi_n|^r}{\varepsilon^r}$$

и условия задачи.

III.3.12. Это задача III.3.4 в другой формулировке.

III.3.13. Нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$P \{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon \} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty;$$

однако, для последовательности, сходящейся с вероятностью 1, согласно III.3.4 имеем значительно больше:

$$P \left\{ \bigcup_{m=n}^{\infty} \{ |\xi_m - \xi| > \varepsilon \} \right\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

См. также III.3.12.

III.3.14. Пример. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем ξ_n принимает значения 0 и $\frac{1}{n}$ с вероятностями $1 - \frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n}$ соответственно, $n \geq 1$. Тогда для $\varepsilon > 0$

$$P \{ |\xi_n| > \varepsilon \} = \frac{1}{n},$$

начиная с некоторого n , и потому $\xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по вероятности. По лемме Бореля—Кантелли

$$P \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \{ |\xi_m| > \varepsilon \} \right\} = 0, \varepsilon > 0,$$

откуда

$$P \{ \lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_n| = +\infty \} = 1.$$

См. также III.3.7.

III.3.15. а) Следствие определения атома. б) Следствие σ -аддитивности вероятности. в) Пусть $\{A_n, n \geq 1\}$ — последовательность всех атомов пространства $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$, которые не пересекаются. Тогда множество

$$A_0 = \Omega \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

не содержит атомов. Потом доказать, что для любого $0 < p \leq P(A_0)$ существует $B \subseteq A_0$, $B \in \mathfrak{A}$ с $P(B) < p$. Затем построить множество с вероятностью p .

III.3.16. а) У к а з а н и е. Предположить, что утверждение не верно. б) В этом случае

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n; P(A_n) > 0, n \geq 1.$$

Случайная величина ξ имеет вид

$$\xi(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n I_{A_n}(\omega),$$

где $\{c_n, n \geq 1\} \subset \mathbb{R}$, I_A — индикатор A . Последовательность

$$\xi_N = \sum_{n=1}^N c_n^{(N)} I_{A_n}(\omega), N \geq 1,$$

сходится к 0 по вероятности тогда и только тогда, когда $c_n^{(N)} \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$, для каждого $n \geq 1$, так как

$$P \{ |\xi_N| > \varepsilon \} = \sum_{n=1}^{\infty} P \{ \{ |\xi_N| > \varepsilon \} \cap A_n \} = \sum_{n=1}^{\infty} I_{(s, \infty)}(|c_n^{(N)}|) P(A_n).$$

В этом случае

$$P \{ \xi_N \rightarrow 0, N \rightarrow \infty \} = 1.$$

в) Если $P(A_0) > 0$, то для каждого n рассмотрим представление A_0 в виде

$$A_0 = \bigcup_{k=1}^n B_{nk}$$

с попарно несовместимыми B_{nk} , $1 \leq k \leq n$, такими, что $P(B_{nk}) = \frac{1}{n} P(A_0)$; $I_{nk} = I_{B_{nk}}$. Проверить, что последовательность $I_{11}, I_{21}, I_{22}, I_{31}, I_{32}, I_{33}, \dots$ сходится к 0 по вероятности и не сходится с вероятностью 1. См. также III.3.7.

III.3.17. Множество, где нарушается хотя бы одно из условий $\xi_n \geq 0$, $\xi_n \geq \xi_{n+1}$, $n \geq 1$, имеет вероятность 0, поэтому можно допустить, что эти условия выполнены всюду. Согласно III.3.4 нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \bigcup_{n=N}^{\infty} \{|\xi_n| \geq \varepsilon\} \right\} = 0,$$

или

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|\xi_n| < \varepsilon\} \right\} = 1.$$

Однако,

$$P \left\{ \bigcap_{n=N}^{\infty} \{|\xi_n| < \varepsilon\} \right\} = P \{|\xi_N| < \varepsilon\}.$$

III.3.18. См. III.3.5.

III.3.19. Если $\xi_n \rightarrow \xi$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности, то, очевидно, каждая подпоследовательность сходится по вероятности к величине ξ , и по теореме (с. 138) содержит подпоследовательность, которая сходится к ξ с вероятностью 1. Если же условие задачи выполнено, а $\{\xi_n, n \geq 1\}$ не сходится к ξ по вероятности, то существуют $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ такие, что

$$P \{|\xi_{n(k)} - \xi| \geq \varepsilon\} \geq \delta$$

для некоторой подпоследовательности $\{\xi_{n(k)}, k \geq 1\}$. Эта подпоследовательность не может содержать подпоследовательности, сходящейся к ξ с вероятностью 1.

III.3.20. Удобно использовать III.3.19.

III.3.21. Следствие III.3.20.

III.3.22. В качестве g рассмотреть индикатор множества

$$\{(y_1, \dots, y_k) : y_1 < x_1, y_2 < x_2, \dots, y_n < x_n\},$$

тогда

$$P \{g(\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(k)}) = 1\} = P \{\xi_n^{(i)} < x_i, 1 \leq i \leq k\},$$

$$P \{g(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}) = 1\} = P \{\xi^{(i)} < x_i, 1 \leq i \leq k\}$$

и

$$P \{|g(\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(k)}) - g(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)})| > \frac{1}{2}\} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Затем рассмотреть разность

$$P \{g(\xi_n^{(1)}, \dots, \xi_n^{(k)}) = 1\} - P \{g(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(k)}) = 1\}.$$

III.3.23. Следствие III.3.22.

III.3.24. Необходимость следует из III.3.23. Для доказательства достаточности рассмотрим при $\varepsilon > 0$ вероятность

$$P \{|\xi_n - c| > \varepsilon\} = P \{\xi_n < c - \varepsilon\} + P \{\xi_n > c + \varepsilon\} \rightarrow \\ \rightarrow F(c - \varepsilon) + 1 - F(c + \varepsilon), n \rightarrow \infty.$$

Утверждение второй части неверно, если c не постоянна.

III.3.25. Рассмотреть последовательность независимых одинаково распределенных с функцией распределения F случайных величин и доказать, что эта последовательность не является фундаментальной по вероятности.

III.3.26. См. III.3.22.

III.3.27. Рассмотреть соотношение

$$\begin{aligned} P\{\xi_n \eta_n > \varepsilon\} &= P\{|\xi_n \eta_n| > \varepsilon, |\xi_n| > a\} + \\ &+ P\{|\xi_n \eta_n| > \varepsilon, |\xi_n| \leq a\} \leq P\{|\xi_n| > a\} + P\left\{|\eta_n| > \frac{\varepsilon}{a}\right\}. \end{aligned}$$

III.3.29. Очевидно, что

$$\begin{aligned} P\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} &\leq P\{|\xi_n - \xi| + |\xi - \xi_m| > \varepsilon\} \leq \\ &\leq P\left\{\left(|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \cup \left(|\xi - \xi_m| > \frac{\varepsilon}{2}\right)\right\} \leq \\ &\leq P\left\{|\xi_n - \xi| > \frac{\varepsilon}{2}\right\} + P\left\{|\xi - \xi_m| > \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \end{aligned}$$

где ξ предел $\{\xi_n, n \geq 1\}$, по вероятности.

III.3.30. Сначала, используя фундаментальность, построить подпоследовательность $\{\xi_{n(k)}, k \geq 1\}$, для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{|\xi_{n(k+1)} - \xi_{n(k)}| > \frac{1}{2^k}\right\} < +\infty.$$

Эта подпоследовательность согласно III.3.10 сходится к случайной величине ξ с вероятностью 1. Затем использовать фундаментальность.

III.3.31. См. III.3.23.

III.3.34. Например,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & x \leq n \\ 1, & x > n, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Справедливо более общее утверждение: для любой монотонно неубывающей, непрерывной слева функции F со значениями $0 \leq F(x) \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$ существует последовательность функций распределения вероятностей, сходящаяся к F в точках непрерывности F .

III.3.35. Предел F — функция монотонно неубывающая. Нужно проверить только, что

$$F(-a) \rightarrow 0, \quad F(a) \rightarrow 1, \quad a \rightarrow +\infty.$$

III.3.36. Следствие неравенства Чебышева и III.3.35.

III.3.37. Следствие неравенства Чебышева.

III.3.38. Первое утверждение следует из неравенства

$$|a + b|^r \leq c_r (|a|^r + |b|^r), \quad c_r = \begin{cases} 1, & 0 < r \leq 1 \\ 2^{r-1}, & r > 1, \quad a, b \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (*)$$

Фундаментальность в среднем порядка $r > 0$ означает, что для любого $\varepsilon > 0$ существует N такое, для которого $M|\xi_m - \xi_n|^r < \varepsilon$;

$m, n > N$. Как и в III.3.37, доказывается фундаментальность по вероятности и на основании III.3.30 сходимость по вероятности к некоторой величине ξ . С помощью леммы Фату получаем

$$M |\xi_m - \xi|^r \leq \varepsilon, \quad m \geq N,$$

откуда, с учетом (*) имеем $M |\xi|^r < \infty$ и сходимость в среднем порядка r к величине ξ .

III.3.39. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых случайных величин, причем

$$P \{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \quad P \{\xi_n = 1\} = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1.$$

Для этой последовательности имеем при любом $r > 0$

$$M |\xi_n|^r = \frac{1}{n}, \quad n \geq 1; \quad P \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 1 \right\} = 1.$$

III.3.40. Утверждение очевидно, если случайные величины не имеют моментов. Например, для случайной величины ξ с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \ln 2 (x \ln^2 x)^{-1}, \quad x \geq 2,$$

для любого $r > 0$ $M \xi^r = +\infty$, а последовательность $\left\{ \frac{1}{n} \xi, n \geq 1 \right\}$ сходится к 0 с вероятностью 1. Однако, утверждение справедливо и в случае, когда моменты существуют. Для последовательности независимых случайных величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ таких, что

$$P \{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P \{\xi_n = n\} = \frac{1}{n^2}, \quad n \geq 1,$$

при любом $n \geq 1$ $M \xi_n^2 = 1$ и $P \{\xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} = 1$.

III.3.41. Согласно III.3.20 $g(\xi_n) \rightarrow g(\xi)$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности. Поэтому нужное утверждение следует из теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

III.3.42. Следствие утверждения: если $M |\xi|^r < \infty$ для $r > 0$, то при $0 < s < r$

$$\{M |\xi|^s\}^{1/s} \leq \{M |\xi|^r\}^{1/r}.$$

III.3.43. Достаточно рассмотреть случай $s = r$ (см. III.3.42). При $r > 1$ нужное утверждение следует из неравенства Минковского

$$\{M |\alpha + \beta|^r\}^{1/r} \leq \{M |\alpha|^r\}^{1/r} + \{M |\beta|^r\}^{1/r},$$

которое приводит к оценке

$$|\{M |\alpha|^r\}^{1/r} - \{M |\beta|^r\}^{1/r}| \leq \{M |\alpha - \beta|^r\}^{1/r}.$$

При $r \leq 1$ аналогично использовать более простое неравенство (см. III.3.38).

III.3.44. Для последовательности независимых величин $\{\xi_n, n \geq 1\}$ с

$$P\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2}, \quad P\{\xi_n = -n^2\} = P\{\xi_n = n^2\} = \frac{1}{2n^2}, \quad n \geq 1,$$

имеем:

$$\begin{aligned} P\{\xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} &= 1; \\ M\xi_n &= 0, \quad n \geq 1; \\ M|\xi_n - 0| &= M|\xi_n| = 1, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

III.3.45. Сначала отметим, что $P\{|\xi| > c\} = 0$ и $\xi_n - \xi \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по вероятности. Затем использовать III.3.41 с

$$g(x) = \begin{cases} |x|^r, & |x| \leq 2c, \\ (2c)^r, & |x| > 2c. \end{cases}$$

III.3.46. Из условий следует, что для многочлена Q

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-c}^c Q(x) dF_n(x) = \int_{-c}^c Q(x) dF(x),$$

где $F_n(x) = P\{\xi_n \leq x\}, n \geq 1; F(x) = P\{\xi \leq x\}$.

Затем использовать первую теорему Вейерштрасса и теорему к § 3.

III.3.47. Следствие теоремы Лебега об ограниченной сходимости.

III.3.48. Существование $M|\xi|^r$ следует из леммы Фату, так как для последовательности $\{\xi_{n(k)}, k \geq 1\}$ такой, что $P\{\xi_{n(k)} \rightarrow \xi, k \rightarrow \infty\} = 1$, имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M|\xi_{n(k)}|^r \geq M[\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi_{n(k)}|^r] = M|\xi|^r.$$

При любом $\varepsilon, 0 < \varepsilon < a$, имеем

$$\begin{aligned} M|\xi_n - \xi|^s &= \int_{\Omega} |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^s dP = \\ &= \left(\int_{\{|\xi_n - \xi| < \varepsilon\}} + \int_{\{\varepsilon < |\xi_n - \xi| < a\}} + \int_{\{|\xi_n - \xi| > a\}} \right) |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)|^s dP \leq \\ &\leq \varepsilon^s + a^s P\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} + a^{s-r} M|\xi_n - \xi|^r. \end{aligned}$$

Из этой оценки получаем $M|\xi_n - \xi|^s \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. То, что, вообще говоря, нельзя положить $s=r$, следует из примера к III.3.40.

III.3.49. Следствие III.3.48 и III.3.42.

III.3.50. Если $\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty$, по вероятности, то $d(\xi_n, \xi) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, по теореме Лебега об ограниченной сходимости. Если $d(\xi_n, \xi) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, то из неравенства Чебышева следует сходимость $\xi_n \rightarrow \xi, n \rightarrow \infty$, по вероятности. См. III.3.42.

III.3.51. Аналогично III.3.50.

III.3.52. а) Использовать неравенство III.3.38. б) Использовать неравенство Минковского. в), г) См. решение III.3.38. д) Следствие неравенства $|\xi|^s \leq 1 + |\xi|^r$.

III.3.53. Для заданного $\varepsilon > 0$ рассмотрим точки $-a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = a$ такие, что

$$F(-a) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad 1 - F(a) < \frac{\varepsilon}{3}, \quad F(x_{k+1}) - F(x_k) < \frac{\varepsilon}{3}, \\ 0 \leq k \leq m-1.$$

Имеем

$$\sup_{x < -a} |F_n(x) - F(x)| \leq F_n(-a) + F(-a); \\ \sup_{x > a} |F_n(x) - F(x)| \leq 1 - F_n(a) + 1 - F(a); \\ \sup_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} |F_n(x) - F(x)| \leq \\ \leq \max_{0 \leq k \leq m-1} \{|F_n(x_{k+1}) - F(x_k)|, |F_n(x_k) - F(x_{k+1})|\}.$$

Пусть теперь n_0 таково, что

$$|F_n(x_k) - F(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad 0 \leq k \leq m, \quad n \geq n_0.$$

Тогда

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon, \quad n \geq n_0.$$

III.3.54. Рассмотреть неравенство

$$|M(\xi_n \eta_n) - c M \eta_n| \leq M(|\xi_n - c| |\eta_n|) = \\ = \int_{\{|\eta_n| > A\}} |\xi_n - c| |\eta_n| dP + \int_{\{|\eta_n| \leq A\}} |\xi_n - c| |\eta_n| dP \leq \\ \leq (a + c) \sup_{n \geq 1} \int_{\{|\eta_n| > A\}} |\eta_n| dP + A \int_{\mathbb{R}} |\xi_n - c| dP.$$

III.3.56. Рассмотреть неравенство

$$\int_{\{|\xi_n| > a\}} |\xi_n| dP \leq \int_{\mathbb{R}} |\xi_n - \xi| dP + \int_{\{|\xi_n| > a\}} |\xi| dP, \\ P\{|\xi_n| > a\} \leq P\left\{|\xi_n - \xi| > \frac{a}{2}\right\} + P\left\{|\xi| > \frac{a}{2}\right\},$$

использовать сходимость $\xi_n \rightarrow \xi$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности и абсолютную непрерывность интеграла.

III.3.59. а) Использовать равенство

$$M|\xi_n| = \int_{\{|\xi_n| \leq A\}} |\xi_n| dP + \int_{\{|\xi_n| > A\}} |\xi_n| dP.$$

б) Рассмотреть подпоследовательность $\{\xi_{n(k)}, k \geq 1\}$ такую, что $P\{\xi_{n(k)} \rightarrow \xi, k \rightarrow \infty\} = 1$, и использовать лемму Фату. Утверждение следует из очевидного равенства

$$M|\xi_n - \xi| = \left(\int_{\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\}} + \int_{\{|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\}} \right) |\xi_n - \xi| dP.$$

III.3.60. Для числа c такого, что $\frac{a(t)}{t} \geq \delta$ при $t \geq c$, рассмотреть неравенство

$$\int_{\{|\xi_n| > c\}} |\xi_n| dP \leq \frac{1}{\delta} \int_{\{|\xi_n| > c\}} a(|\xi_n|) dP \leq \frac{1}{\delta} \sup_{n \geq 1} M a(|\xi_n|).$$

III.3.61. Следствие III.3.60. **Замечание.** Определение III.3.56, утверждение III.3.60 пригодны для любого семейства случайных величин (не обязательно счетного).

III.3.62. Действительно,

$$\begin{aligned} & \int_{\{|S_n| > A\sqrt{n}\}} \frac{1}{\sqrt{n}} |S_n| dP \leq \\ & \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \int_{\Omega} S_n^2 dP \cdot P\{|S_n| > A\sqrt{n}\} \right\}^{1/2} \leq \frac{\sigma^2}{A}. \end{aligned}$$

III.3.63. Следствие неравенства Коши.

III.3.64. Следствие неравенства Коши

$$\begin{aligned} & |M(\xi_n \eta_n) - M(\xi_n) M(\eta_n)| \leq |M(\xi_n - \xi) \eta_n| + |M\xi(\eta_n - \eta)| \leq \\ & \leq \{M(\xi_n - \xi)^2 M\eta_n^2\}^{1/2} + \{M\xi^2 M(\eta_n - \eta)^2\}^{1/2} \end{aligned}$$

и того, что $M\eta_n^2 \rightarrow M\eta^2$, $n \rightarrow \infty$.

III.3.65. Необходимость — следствие теоремы Лебега об ограниченной сходимости; достаточность следует из неравенства Чебышева.

III.3.66. См. III.3.20.

III.3.69. Рассмотрим соотношение

$$\begin{aligned} & P\{|\zeta_n| > \varepsilon\} = P\{|\xi_n| > \varepsilon, |\xi_n| \leq a, |\eta_n| \leq \delta\} + \\ & + P\{|\xi_n| > \varepsilon, |\xi_n| > a \text{ или } |\eta_n| > \delta\} \leq \\ & \leq P\{|\xi_n| > \varepsilon, |\xi_n| \leq a, |\eta_n| \leq \delta\} + P\{|\xi_n| > a\} + P\{|\eta_n| > \delta\}, \end{aligned}$$

где

$$\zeta_n = g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n).$$

Для заданного $\gamma > 0$ сначала возьмем $a > 0$ таким, чтобы при всех $n \geq 1$ $P\{|\xi_n| > a\} < \frac{\gamma}{2}$. Затем выберем $\delta > 0$ таким, чтобы

$$|g(x+y) - g(x)| < \varepsilon, \quad |y| < \delta, \quad |x| \leq a.$$

Возьмем также n_0 таким, что

$$P\{|\eta_n| > \delta\} < \frac{1}{2} \gamma, \quad n \geq n_0.$$

При $n \geq n_0$ имеем

$$P\{|\zeta_n| > \varepsilon\} < \gamma.$$

III.3.70. См. III.3.69.

III.3.71. См. введение.

III.3.72. Использовать III.3.68, III.3.70, III.3.71 и теорему Лебега. В случае суммы достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M g(\xi_n + \eta_n) = M g(\xi + c).$$

Однако,

$$M g(\xi_n + \eta_n) = M [g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n + c)] + M g(\xi_n + c),$$

причем последовательность $\{g(\xi_n + \eta_n) - g(\xi_n + c), n \geq 1\}$ ограничена и сходится по вероятности 0.

III.3.73. Положить $\eta_n = \xi_n + \delta_n, n \geq 1$, и использовать III.3.68, III.3.27 и III.3.72.

III.3.74. Если $0 < \varepsilon_n < \frac{1}{2}$, то

$$|\xi_n - \eta_n| \leq 2\varepsilon_n |\xi_n|.$$

См. III.3.73.

III.3.75. См. III.3.71.

III.3.76. См. III.3.4.

III.3.78. По условию для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{n \geq m} |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \right\} = 0$$

и для любого $c > 0$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} P \left\{ \inf_{n \geq m} v(n) \geq c \right\} = 1.$$

Поэтому при любом N_1

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{n \geq N} |\xi_{v(n)} - \xi| \geq \varepsilon \right\} = \\ &= P \left\{ \sup_{n \geq N} |\xi_{v(n)} - \xi| \geq \varepsilon, \inf_{n \geq N} v(n) \geq N_1 \right\} + \\ &+ P \left\{ \sup_{n \geq N} |\xi_{v(n)} - \xi| \geq \varepsilon, \inf_{n \geq N} v(n) < N_1 \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ \sup_{n \geq N_1} |\xi_n - \xi| \geq \varepsilon \right\} + P \left\{ \inf_{n \geq N} v(n) < N_1 \right\}. \end{aligned}$$

III.3.79. По лемме Бореля—Кантелли происходит с вероятностью 1 бесконечно много событий из $\{\xi_n = 1\}, n \geq 1$.

III.3.80. Для любых $\varepsilon > 0$ и N имеем

$$\begin{aligned} & P \left\{ |\xi_{v(n)} - \xi| \geq \varepsilon \right\} = P \left\{ |\xi_{v(n)} - \xi| \geq \varepsilon, v(n) < N \right\} + \\ &+ \sum_{k=N}^{\infty} P \left\{ |\xi_{v(n)} - \xi| \geq \varepsilon, v(n) = k \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ v(n) < N \right\} + \sum_{k=N}^{\infty} P \left\{ |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon, v(n) = k \right\} = \\ &= P \left\{ v(n) < N \right\} + \sum_{k=N}^{\infty} P \left\{ |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon \right\} P \left\{ v(n) = k \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ v(n) < N \right\} + P \left\{ v(n) \geq N \right\} \sup_{k \geq N} P \left\{ |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon \right\} \leq \\ &\leq P \left\{ v(n) < N \right\} + \sup_{k \geq N} P \left\{ |\xi_k - \xi| \geq \varepsilon \right\}. \end{aligned}$$

III.3.81. Действительно,

$$\begin{aligned} P\{\xi_{v(n)} < x\} &= P\{\xi_{v(n)} < x, v(n) < N\} + \\ &+ \sum_{k=N}^{\infty} P\{\xi_{v(n)} < x, v(n) = k\} \leq P\{v(n) < N\} + \sup_{n \geq N} P\{\xi_n < x\}. \end{aligned}$$

III.3.82. Рассмотреть соотношение

$$\begin{aligned} M|\xi_{v(n)} - \xi|^r &= \sum_{k=1}^{\infty} M\{|\xi_{v(n)} - \xi|^r \cdot I(v(n) = k)\} \leq \\ &\leq \sup_{n \geq 1} M|\xi_n - \xi|^r \cdot P\{v(n) < N\} + \sup_{n \geq N} M|\xi_n - \xi|^r \end{aligned}$$

при N натуральном, $I(A)$ — индикатор события A .

III.3.84. Пусть $\Omega = [0, 1]$, \mathfrak{A} — σ -алгебра измеримых по Лебегу подмножеств Ω , P — мера Лебега на \mathfrak{A} . Для функции F_n определим функцию H_n так: $H_n(y) = x$, если $F_n(x) = y$ и существует только одно такое значение x ; $H_n(y) = x_{np}$, если равенство $F_n(x) = y$ выполнено для всех $x \in (x_0, x_{np}]$ (рассматривается наибольший интервал), и $H_n(y) = x_p$, если $F_n(x_p) < y < F_n(x_p + 0)$; $0 \leq y \leq 1$. Величина $H_n(\omega)$, $\omega \in \Omega$ является случайной и имеет функцию распределения F_n . Проверить, что

$$P\{H_n \rightarrow H, n \rightarrow \infty\} = 1.$$

III.3.89. Следствие теоремы Лебега и того, что $g(\vec{\xi}^{(n)}) \rightarrow g(\vec{\xi})$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности. См. III.3.20.

III.3.90. См. III.3.89.

III.3.91. См. III.3.19.

III.3.92. Случай $m = 1$ см. в III.3.53.

III.3.93. Следствие теоремы из введения.

III.3.94. Аналогично III.3.69.

III.3.95. Использовать: III.3.94, теоремы о слабой сходимости и Лебега.

§ 4

III.4.1. Следствие неравенства Чебышева.

III.4.2. Следствие теоремы Лебега.

III.4.3. Для любого $x \in \mathbb{R}$ $\{f(x + \xi_n), n \geq 1\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных величин со средним значением

$$\int_0^1 f(u) du.$$

III.4.4. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. В силу закона больших чисел

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow M\xi_1 = \frac{1}{2}, n \rightarrow \infty,$$

по вероятности. Из непрерывности функции f следует

$$f(S_n) \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right), \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности, а ограниченность f и теорема Лебега приводят к соотношению

$$Mf(S_n) \rightarrow Mf\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Записать выражение для $Mf(S_n)$, используя независимость величин ξ_n , $n \geq 1$.

III.4.5. Ответ. 2^{-m} .

III.4.6. Аналогично III.4.4.

III.4.7. Пусть $\{\xi_n, n \geq 1\}$ — последовательность независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин и

$$\eta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k), \quad \zeta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n g(\xi_k), \quad n \geq 1.$$

Тогда

$$\eta_n \rightarrow \int_0^1 f(x) dx, \quad \zeta_n \rightarrow \int_0^1 g(x) dx, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности, следовательно, и последовательность $\{\eta_n/\zeta_n, n \geq 1\}$ сходится по вероятности. Кроме того, по условию $0 \leq \eta_n/\zeta_n < c$, $n \geq 1$. Применить теорему Лебега к $M(\eta_n/\zeta_n)$.

III.4.8. См. III.4.7.

III.4.9. Заметим, что

$$\begin{aligned} n \int_0^1 \dots \int_0^1 \left[f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right] dx_1 \dots dx_n = \\ = nM \left[f\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n}\right) - f\left(\frac{1}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

для последовательности независимых равномерно на $[0, 1]$ распределенных величин ξ_n , $n \geq 1$. Используя формулу Тейлора

$$\begin{aligned} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) + f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \\ + \frac{1}{2} f''\left(\frac{1}{2} + \theta\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)^2, \quad 0 < \theta < 1, \end{aligned}$$

и очевидное равенство

$$M \left[\frac{\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{1}{2} \right] = 0,$$

получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{M} \left\{ f \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \right) - f \left(\frac{1}{2} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{M} \left\{ f'' \left(\frac{1}{2} + \theta \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{1}{2} \right) \right) \times \right. \\ & \quad \left. \times \left[\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{1}{2} \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

В силу закона больших чисел

$$\frac{1}{n} (\xi_1 + \dots + \xi_n) \rightarrow \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности, кроме того, очевидно: $n \mathbf{M} \left[\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} - \frac{1}{2} \right]^2 = \frac{1}{12}$.
Теперь легко проверить, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \mathbf{M} \left\{ f \left(\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{n} \right) - f \left(\frac{1}{2} \right) \right\} = \frac{1}{24} f'' \left(\frac{1}{2} \right).$$

III.4.10. Пусть ξ_n , $n \geq 1$, величины из III.4.9. Значения интегралов равны:

$$\text{а) } \mathbf{P} \{ \xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2 \leq \sqrt{n} \} =$$

$$= \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) < \frac{1}{\sqrt{n}} \right\};$$

$$\text{б) } \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) \leq \frac{1}{4} \right\};$$

$$\text{в) } \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Согласно закону больших чисел

$$\frac{1}{n} (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2) \rightarrow \mathbf{M} \xi_1^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности. Ответ. а) 0, б) 0, в) 1.

III.4.11. Аналогично III.4.10.

III.4.12. Следствие теоремы Лебега и закона больших чисел, согласно которому

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности.

III.4.13. Следствие теоремы Хинчина.

III.4.14. См. III.4.13.

III.4.16. Сначала доказать, что

$$\sup_{n \geq 1} \mathbf{P} \{ |\xi_n| > c \} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

при этом несколько раз использовать равенство

$$\xi_n = -\alpha \xi_{n-1} + \varepsilon_n = -\alpha (-\alpha \xi_{n-2} + \varepsilon_{n-1}) + \varepsilon_n$$

и неравенство Чебышева. Затем рассмотреть равенство

$$\frac{1}{n} \xi_{n+1} + \frac{\alpha}{n} \xi_n + (1 + \alpha) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k.$$

III.4.17. Посуммировать подходящим образом равенства

$$\xi_n^2 + \alpha \xi_n \xi_{n-1} = \xi_n \varepsilon_n, \quad \xi_n \xi_{n-1} + \alpha \xi_{n-1}^2 = \xi_{n-1} \varepsilon_n, \quad n \geq 1,$$

и рассмотреть их правые части.

III.4.18. Следствие закона больших чисел к последовательности одинаково распределенных случайных величин с конечной дисперсией. Рассмотреть, например, m последовательностей отдельно.

III.4.19. Проверить, что

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k^2 - (\bar{x})^2$$

и применить закон больших чисел.

III.4.20. Положим,

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & \xi_i < x, \\ 0, & \xi_i \geq x, \end{cases} \quad i \geq 1.$$

Величины χ_i , $1 \leq i \leq n$ независимы и

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \chi_k, \quad MF_n(x) = F(x), \quad DF_n(x) = \frac{F(x)[1-F(x)]}{n}.$$

III.4.21. Для $\varepsilon > 0$ согласно неравенству Чебышева имеем

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \right| \geq \varepsilon \right\} &\leq \varepsilon^{-\frac{r}{2}} n^{-\frac{r}{2}} \cdot M \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \right|^{\frac{r}{2}} \leq \\ &\leq \varepsilon^{-\frac{r}{2}} n^{-\frac{r}{2}} \cdot \sum_{k=1}^n M \left\{ |\xi_k|^{\frac{r}{2}} \right\} \leq \\ &\leq \varepsilon^{-\frac{r}{2}} n^{-\frac{r}{2}} \cdot \sum_{k=1}^n \sqrt{M |\xi_k|^r}. \end{aligned}$$

III.4.24. Рассмотреть неравенства

$$\begin{aligned} & |Mf(\eta_n) - f(x)| \leq M |f(\eta_n) - f(x)| = \\ & = M \{ |f(\eta_n) - f(x)| / |\eta_n - x| < \delta \} \cdot P \{ |\eta_n - x| < \delta \} + \\ & + M \{ |f(\eta_n) - f(x)| / |\eta_n - x| \geq \delta \} \cdot P \{ |\eta_n - x| \geq \delta \}, \end{aligned}$$

применить неравенство Чебышева.

III.4.29. а) При $c > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \int_{\{|S_n| > cn\}} |S_n| dP &= \frac{1}{n} \int_{\{S_n > cn\}} S_n dP + \\ + \frac{1}{n} \int_{\{S_n < -cn\}} (-S_n) dP &= \int_{\{|S_n| > cn\}} |\xi_1| dP, \end{aligned}$$

где $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$. Далее использовать закон больших чисел в форме Хинчина.

б) Следствие а) и III.3.59.

III.4.30. В силу теоремы 1, § 4,

$$\frac{1}{n} S_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

по вероятности. На основании формулы полной вероятности

$$\begin{aligned} & P \left\{ \frac{1}{v+1} |S_{v+1}| > \varepsilon \right\} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} P \left\{ \frac{1}{v+1} |S_{v+1}| > \varepsilon / (v=n) \right\} \cdot P \{v=n\} = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} P \left\{ \frac{1}{n+1} |S_{n+1}| > \varepsilon \right\} \cdot \frac{1}{n!} \cdot \lambda^n \cdot e^{-n}. \end{aligned}$$

Из этих двух утверждений следует нужный результат.

III.4.31. См. III.3.80.

§ 5

III.5.1. Следствие неравенства Колмогорова.

III.5.2. Следствие неравенства Колмогорова.

III.5.4. Доказательство этого обобщения неравенства Колмогорова полностью аналогично доказательству теоремы 1, § 5, с дополнительным использованием неравенства Иенсена, $Mg(\xi) \geq g(M\xi)$, для выпуклой вниз функции.

III.5.5. Рассмотреть равенство

$$\begin{aligned} & 2P\{S_n > l\} + P\{S_n = l\} = \\ & = 2 \sum_{k=1}^n P\{S_1 < l, \dots, S_{k-1} < l, S_k = l, S_n - S_k > 0\} + \\ & + \sum_{k=1}^n P\{S_1 < l, \dots, S_{k-1} < l, S_k = l, S_n - S_k = 0\} \end{aligned}$$

с учетом того, что

$$2P\{S_n - S_k > 0\} + P\{S_n - S_k = 0\} = 1.$$

III.5.7. Аналогично доказательству неравенства Колмогорова с использованием основных свойств условного математического ожидания.

III.5.8. См. указание к III.5.7.

III.5.9. См. указание к III.5.7.

III.5.10. Использовать неравенство Колмогорова и формулу

$$\int_0^{\infty} x dF(x) = \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx,$$

где F — функция распределения вероятностей на $[0, \infty)$.

§ 6

$$\text{III.6.1. а) } \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left\{ \omega : |\xi_1 + \dots + \xi_n - \xi| < \frac{1}{k} \right\}.$$

$$\text{б) } \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=0}^{\infty} \left\{ \omega : |\xi_N + \xi_{N+1} + \dots + \xi_{N+n}| < \frac{1}{k} \right\}.$$

III.6.2. а) Это условие для $P\{\xi_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty\} = 1$. б) См. III.6.1, б), в), г) следует из закона 0 и 1.

III.6.3. Согласно лемме Бореля—Кантелли с вероятностью 1 происходит только конечное число событий из последовательности $\{|\xi_n| \geq \varepsilon_n\}$, $n \geq 1$. Поэтому с вероятностью 1 ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится абсолютно.

III.6.4. К последовательности

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k, n \geq 1 \right\}$$

применить лемму Беппо—Леви.

III.6.5. См. III.6.4.

III.6.7. Указание. Общий член сходящегося с вероятностью 1 ряда сходится к 0 с вероятностью 1.

III.6.8. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n$$

сходится в среднем квадратичном тогда и только тогда, когда последовательность

$$S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 1,$$

фундаментальна в среднем квадратичном. Рассмотрим равенство

$$M(S_n - S_m)^2 = M\left(\sum_{k=m+1}^n \xi_k\right)^2 = \sum_{k=m+1}^n M\xi_k^2, \quad m < n.$$

III.6.9. Проверить фундаментальность в среднем квадратичном.

III.6.10. Пусть, например,

$$\xi_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \eta_n, \quad n \geq 1,$$

где $\{\eta_n, n \geq 1\}$ — последовательность некоррелированных случайных величин, причем

$$P\left\{\eta_n = -\frac{1}{n}\right\} = P\left\{\eta_n = \frac{1}{n}\right\} = \frac{1}{2}, \quad n \geq 1.$$

III.6.11. Следствие неравенства Коши.

III.6.12. См. III.6.11.

III.6.13. См. III.6.11.

III.6.14. Нужно проверить фундаментальность в среднем квадратичном. Можно воспользоваться представлением

$$S_n = \sum_{k=1}^n \eta_k, \quad \eta_k = 2\xi_k \sum_{j=1}^{k-1} a_{jk}\xi_j + a_{kk}\xi_k^2,$$

ортогональность величин

$$\eta_k - M\eta_k, \quad \eta_j - M\eta_j, \quad k \neq j$$

и формулой

$$D\eta_k^2 = 4 \sum_{j=1}^{k-1} a_{jk}^2 + a_{kk}^2 (M\xi_k^4 - 1).$$

III.6.15. Доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n.$$

III.6.16. Использовать достаточное условие сходимости бесконечного произведения и III.6.4.

III.6.17. Решение. Сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2$$

влечет сходимость с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n^2 = \eta$$

(см. III.6.4.). Предположим, что последний ряд сходится с вероятностью 1; тогда

$$P\{\eta < \infty\} = 1, \quad P\{e^{-\eta} > 0\} = 1.$$

Поэтому $Me^{-\eta} > 0$.

Легко проверить, что

$$Me^{-\eta} = \prod_{n=1}^{\infty} Me^{-\xi_n^2},$$

после простых вычислений имеем:

$$Me^{-\xi_n^2} = (1 + 2M\xi_n^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad n \geq 1.$$

Таким образом, сходится произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 2M\xi_n^2)^{-\frac{1}{2}},$$

последнее возможно тогда и только тогда, когда сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n^2.$$

III.6.18. См. III.6.17.

III.6.19. Решение. По теореме 1, § 5, с вероятностью 1 сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n.$$

Поэтому существует математическое ожидание в левой части доказываемого равенства. При каждом $N \geq 1$ из независимости величин ξ_n , $n \geq 1$, следует, что

$$M \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N \xi_n \right\} = \prod_{n=1}^N M \exp \{ i \xi_n \}.$$

Применив теорему Лебега, получим также

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M \exp \left\{ i \sum_{n=1}^N \xi_n \right\} = M \exp \left\{ i \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \right\}.$$

Отсюда и предыдущего равенства следует утверждение задачи.

III.6.20. С помощью равенства

$$D\xi = \sum_{k=1}^n D\xi_k + D(\xi - \xi_1 - \xi_2 - \dots - \xi_n)$$

доказать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} D\xi_n.$$

Затем применить теорему 1, § 6.

III.6.21. Использовать III.6.9 и теорему 1, § 6.

III.6.22. Следствие теоремы 1, § 6.

III.6.25. а) Ряд сходится по вероятности тогда и только тогда, когда последовательность частичных сумм фундаментальна по вероятности. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$P \left\{ \left| \sum_{k=m}^n (a_k \xi_k + b_k) \right| > \varepsilon \right\} \rightarrow 0$$

при $m, n \rightarrow \infty$. Величина

$$\eta_{mn} = \sum_{k=m}^n (a_k \xi_k + b_k)$$

гауссовская, причем

$$M\eta_{mn} = \mu_{mn} = \sum_{k=m}^n b_k, \quad D\eta_{mn} = \sigma_{mn}^2 = \sum_{k=m}^n a_k^2.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \sum_{k=m}^n (a_k \xi_k + b_k) \right| > \varepsilon \right\} &= \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{mn}} \int_{|x| > \varepsilon} \exp \left\{ -\frac{(x - \mu_{mn})^2}{2\sigma_{mn}^2} \right\} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|x\sigma_{mn} + \mu_{mn}| > \varepsilon} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\varepsilon - \mu_{mn}}{\sigma_{mn}}}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{-\varepsilon - \mu_{mn}}{\sigma_{mn}}} \exp \left\{ -\frac{x^2}{2} \right\} dx. \end{aligned}$$

Для того чтобы эта величина стремилась к 0, необходимо, чтобы $\sigma_{mn} \rightarrow 0$, $\mu_{mn} \rightarrow 0$, $m, n \rightarrow \infty$.

б) См. III.6.24.

III.6.26. Использовать III.6.25.

III.6.27. Согласно III.2.14 величина $\frac{\eta+1}{2}$ имеет равномерное распределение на $[0, 1]$.

III.6.29. Использовать лемму Бореля—Кантелли.

III.6.30. Применить критерий трех рядов.

III.6.31. Использовать критерий трех рядов. Достаточно доказать, что последовательности

$$\{\xi_n, n \geq 1\}, \{\xi_n^c, n \geq 1\}.$$

эквивалентны по Хинчину:

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi_n| > c\} < \infty.$$

При условиях задачи

$$|M\xi_n^c| < \frac{c}{2}, \quad n \geq N,$$

и

$$D\xi_n^c \geq \int_{\{|\xi_n| > c\}} (\xi_n^c - M\xi_n^c)^2 dP \geq \frac{c^2}{4} P\{|\xi_n| > c\}, \quad n \geq N.$$

III.6.32. Использовать критерий трех рядов. При доказательстве необходимости сначала доказать, что последовательность $\{a_n, n \geq 1\}$ ограничена. Если для некоторой подпоследовательности $a_n(k) \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$, то

$$\xi_{n(k)} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

с вероятностью 1.

III.6.34. Использовать неравенство

$$P\left\{\max_{1 \leq k \leq n} \left|\sum_{i=1}^k \xi_i\right| \leq a\right\} \leq \frac{(a+c)^2}{\sum_{i=1}^n M\xi_i^2}.$$

III.6.35. Следствие закона 0 и 1 и теорем § 6.

III.6.36. Ответ. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$.

III.6.37. При $a_n > 0, n \geq 1$, нужно, чтобы $a_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, и сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ln \frac{1}{a_n}.$$

III.6.38. Следствие теоремы о трех рядах.

III.6.39. Следствие теоремы о трех рядах.

III.6.40. Рассмотреть соответствующие частичные суммы и использовать теорему § 6.

III.6.44. Последовательность частичных сумм ограничена по вероятности. Далее см. III.6.25 или III.6.41.

III.6.45. Последовательность частичных сумм ограничена по вероятности, откуда следует сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} M\xi_n.$$

III.6.46. Доказать ограниченность по вероятности частичных сумм, затем использовать III.6.41.

III.6.47. Использовать теорему о трех рядах.

III.6.48. См. III.6.19.

III.6.49. Использовать теорему 2, § 5.

§ 7

III.7.1. Следствие усиленного закона больших чисел.

III.7.4. Использовать равенства

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{k}, \quad \xi_m = m(S_m - S_{m-1}); \quad S_0 = 0.$$

III.7.8. По лемме Бореля—Кантелли последовательность

$$\left\{ \frac{1}{n} \xi_n, n \geq 1 \right\}$$

не сходится к 0 с вероятностью 1 (см. III.7.6).

III.7.10. См. III.7.7 и теорему 1, § 6.

III.7.12. См. III.7.4 и III.6.5.

III.7.13. Доказать сходимость с вероятностью 1 ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \xi_n,$$

см. III.7.9.

III.7.14. Доказать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} M \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \right)^4 < \infty.$$

III.7.15. См. III.6.46 и III.7.4.

III.7.16. Использовать III.2.16 и усиленный закон больших чисел.

III.7.19. При условии задачи

$$\frac{1}{2^n} S_{2^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

с вероятностью 1 (см. III.3.9). Далее доказать, что

$$\begin{aligned} & \max_{2^n < m < 2^{n+1}} \left| \frac{1}{m} S_m - \frac{1}{2^n} S_{2^n} \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2^n} \max_{2^n < m < 2^{n+1}} |S_m - S_{2^n}| + \frac{1}{2^n} S_{2^n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

с вероятностью 1, с помощью неравенства теоремы 3, § 5.

III.7.22. То, что предел с вероятностью 1 существует и равен 0 означает, что

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P \left\{ \sup_{m \geq N} \sup_{n \geq 1} \frac{1}{m} |\xi_{n+1} + \dots + \xi_{n+m}| < \varepsilon \right\} = 0.$$

III.7.23. Решение этой задачи аналогично решению задачи III.7.4 с использованием следующего элементарного факта: из сходимости $x_n \rightarrow x$, $n \rightarrow \infty$, следует, что

$$\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n (a_k - a_{k-1}) x_k \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty.$$

III.7.24. См. III.7.23.

III.7.25. Доказать, что

$$P \{ a_n^{-1} \xi_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \} = 1.$$

III.7.26. Следствие III.7.24.

III.7.27. См. III.7.26.

III.7.28. Нужно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число c такое, для которого неравенство

$$|\xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n| > cn^{\frac{1}{2} + \varepsilon}$$

справедливо с вероятностью 1 только для конечного числа значений n . См. III.7.27.

III.7.29. Отметим сначала, что

$$\eta_n = \frac{1}{n^{1+\alpha}} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow 0,$$

по вероятности, при $n \rightarrow \infty$ (см. решение задачи III.2.30), так как

$$P \{ |\eta_n| \geq \varepsilon \} \leq \frac{1}{\pi \varepsilon n^\alpha}.$$

Подпоследовательность $\eta_{n_l} \rightarrow 0$ с вероятностью 1 при $n \rightarrow \infty$ по лемме Бореля — Кантелли. Чтобы доказать, что $\eta_n \rightarrow 0$ с вероятностью 1 при $n \rightarrow \infty$, нужно убедиться, что для произвольного $\varepsilon > 0$ с вероятностью 1 происходит только конечное число событий с $A_n = \{ |\eta_n| \geq \varepsilon \}$, $n \geq 1$, т. е. доказать, что

$$P \left\{ \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} A_n \right\} = P \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right\} = 0,$$

а для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right\} = 0.$$

Для целого $n \geq 1$ определим целое число $m(n)$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$2^{m(n)} \leq n < 2^{m(n)+1}.$$

Если $\eta_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, по вероятности, то для произвольного $\varepsilon > 0$ существует число N такое, для которого

$$P \left\{ |S_{2^{m(n)+1}} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2} n^{1+\alpha} \right\} \geq \frac{1}{2}$$

при $n \geq N$, где

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Действительно,

$$\frac{S_n}{n^{1+\alpha}} \rightarrow 0,$$

$$\frac{1}{n^{1+\alpha}} S_{2^{m(n)+1}} = \frac{2^{(m(n)+1)(1+\alpha)}}{n^{1+\alpha}} \cdot \frac{1}{2^{(m(n)+1)(1+\alpha)}} S_{2^{m(n)+1}} \rightarrow 0,$$

по вероятности, при $n \rightarrow \infty$, так как

$$2^{(m(n)+1)(1+\alpha)} n^{-1-\alpha} \leq 2^{1+\alpha}.$$

Положим

$$B_n = \left\{ |S_{2^{m(n)+1}} - S_n| < \frac{\varepsilon}{2} n^{1+\alpha} \right\},$$

$$C_n = \left\{ |S_{2^{m(n)+1}}| \geq \frac{\varepsilon}{2} n^{1+\alpha} \right\}, \quad n \geq 1.$$

Легко доказать, что

$$A_n B_n \subset C_n, \quad n \geq 1,$$

и что события A_k и B_n независимы при $k \leq n$. Теперь при $n \geq N$ получим:

$$\begin{aligned} P \left\{ \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right\} &= P \{A_n\} + P \{A_{n+1} \cdot \bar{A}_n\} + P \{A_{n+2} \cdot \bar{A}_n \cdot \bar{A}_{n+1}\} + \dots \leq \\ &\leq 2 [P \{A_n\} P \{B_n\} + P \{A_{n+1} \bar{A}_n\} P \{B_{n+1}\} + P \{A_{n+2} \bar{A}_n \bar{A}_{n+1}\} \times \\ &\times P \{B_{n+2}\} + \dots] = 2 [P \{A_n B_n\} + P \{A_{n+1} B_{n+1} \bar{A}_n\} + \dots] \leq \\ &\leq 2 [P \{A_n B_n\} + P \{A_{n+1} B_{n+1} \bar{A}_n B_n\} + P \{A_{n+2} B_{n+2} \cdot \bar{A}_n \cdot \bar{B}_n \times \\ &\times \bar{A}_{n+1} B_{n+1}\} + \dots] = 2P \left\{ \bigcup_{i=n}^{\infty} A_i B_i \right\} \leq 2P \left\{ \bigcup_{i=n}^{\infty} C_i \right\}. \end{aligned}$$

Соотношение $\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \bigcup_{i=n}^{\infty} C_i \right\} = 0$ является следствием сходимости к 0 с вероятностью 1 последовательности $\{\eta_{2^n}, n \geq 1\}$.

III.7.30. Необходимость условия очевидна. Для доказательства достаточности предположим, что

$$M(\eta_{2^n} - M\eta_{2^n})^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=1}^{2^n} D\xi_k \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Тогда

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k \rightarrow 0.$$

Действительно, пусть $m(n)$ таково, что

$$2^{m(n)} \leq n < 2^{m(n)+1}.$$

Имеем, очевидно,

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k \leq \frac{1}{2^{2m(n)+2}} \sum_{k=1}^{2^{m(n)+1}} D\xi_k.$$

Тогда

$$M(\eta_n - M\eta_n)^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n D\xi_k \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Замечание. Очевидно, утверждение остается верным, если вместо независимости величин ξ_k , $k \geq 1$, требовать только их ортогональности:

$$M(\xi_i - M\xi_i)(\xi_k - M\xi_k) = 0, \quad j \neq k.$$

§ 8

III.8.9. См. II.6.35 и II.6.9. Заметим, что при доказательстве сходимости можно рассматривать только F -измеримые величины, так как

$$M(\xi/F_n) = M[M(\xi/F)/F_n]$$

(см. II.6.9). Нужно доказать, что

$$P\{\lim_{n \rightarrow \infty} M(\xi/F_n) = \xi\} = 1$$

для F -измеримой величины ξ с $M|\xi| < \infty$. Затем использовать представление

$$\xi = \xi^+ - \xi^-, \quad \xi^+ = \max(0, \xi), \quad \xi^- = \min(0, \xi)$$

и III.8.8.

III.8.10. Сначала можно вычислить

$$M(\zeta_n/\zeta_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = \zeta_{n-1} M \frac{\xi_n}{m} = \zeta_{n-1}$$

(см. II.6.10, II.6.7). Затем на основании II.6.9

$$M(\xi_n/\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}) = \\ = M[M(\xi_n/\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1})/\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}] = \xi_{n-1}.$$

III.8.11. Аналогично III.8.10.

Глава IV

§ 1

$$\text{IV.1.1. а) } \frac{p}{1-z(1-p)}; \quad \text{б) } (pr+1-p)^m; \quad \text{в) } e^{\lambda(z-1)}; \quad \text{г) } \\ \frac{1-z^{N+1}}{(N+1)(1-z)}.$$

IV.1.5.

$$p_n = \begin{cases} 0 & \text{для } n = 2k, k = 0, 1, \dots \\ \frac{1}{2q} C_{\frac{1}{2}}^{k+1} 4pq^{k+1} (-1)^{k+1} & \text{для } n = 2k+1, k = 0, 1, \dots \end{cases}$$

IV.1.6. Найти производящие функции величин $n + \xi + \eta - \zeta$, $2n + \xi + \eta - 2\zeta$ и $\xi + \eta + \zeta$ и коэффициенты в разложении этих производящих функций по степеням z соответственно при z^n , z^{2n} и z^{n+1} .

О т в е т. а) $\frac{n-1}{2n^2}$ б) $\frac{1}{2n}$, если n — четное, $\frac{n^2+1}{2n^3}$, если n — нечетное; в) $\frac{n-1}{2n^2}$.

IV.1.7.

$$\varphi_{\nu N}^{+} = z^N (1 - (1-p)^{N+1}) + \frac{p(z(1-p))^{N+1}}{1-r(1-p)}, \\ \varphi_{\nu N}^{-} = \frac{p(1 - ((1-p)z)^{N+1})}{1 - (1-p)z} + z^N (1-p)^{N+1}.$$

IV.1.11. $e^{\lambda(pz_1z_2 + (1-p)z_1 - 1)}$.

$$\text{IV.1.12. } \frac{p}{1 - (1-p)z_1} \left(\frac{u}{1 - (1-u)z_2} (1 - ((1-p)z_1^{N+1}) + \right. \\ \left. + \frac{v}{1 - (1-v)z_2} ((1-p)z_1)^{N+1} \right).$$

$$\text{IV.1.17. } \frac{1}{(N+1)^2(1-z_2)} \left((1+z_2) \frac{1-z_1^{N+1}}{1-z_1} - \frac{1-(z_1z_2)^{N+1}}{1-z_1z_2} - \right. \\ \left. - z_2 \frac{z_2^{N+1} - z_1^{N+1}}{z_2 - z_1} \right).$$

IV.1.25. б) Изобразить $P(s)$ в виде

$$P(s) = \frac{A_1}{1 - z_1^{-1}s} + \frac{A_2}{1 - z_2^{-1}s}$$

и вывести отсюда такую формулу:

$$P_n = \frac{A_1}{z_1^n} + \frac{A_2}{z_2^n}.$$

$$\text{IV.1.28. } u(z) = \frac{z^2(3u_2 - u_1 - u_0) + z(3u_1 - u_0) + 3u_0}{3 - z - z^2 - z^3}.$$

$$u_n \rightarrow \frac{1}{6}(3u_2 + 2u_1 + u_0) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

IV.1.30. Воспользоваться тем, что число «благоприятных результатов» N_n удовлетворяет соотношению

$$N_n = \sum_{r=0}^{n-1} N_r N_{n-r-1}.$$

$$\text{IV.1.31. } (p_1 z_1 + \dots + p_l z_l)^n.$$

IV.1.32. а) Воспользоваться следующими рекуррентными соотношениями для вероятностей:

$$p(r, k) = p\{\tau_1 = k, \tau_2 = r\} \text{ и } p_l(r) = P\{\tau_l = r\}, \quad i = 1, 2,$$

$$p(r, k) = \begin{cases} (1 - p_1 - p_2) p(r-1, k-1) & \text{для } r > 1, k > 1; \\ p_1 p_2 (k-1) & \text{для } r = 1, k > 1; \\ p_2 p_1 (r-1) & \text{для } k = 1, r > 1; \\ 0 & \text{для } k = 1, r = 1; \end{cases}$$

$$\varphi(z_1, z_2) = \frac{p_1 p_2 z_1 z_2}{1 - (1 - p_1 - p_2) z_1 z_2} \left(\frac{z_2}{1 - z_2(1 - p_2)} + \frac{z_1}{1 - z_1(1 - p_1)} \right).$$

IV.1.34. а) Найти совместную производящую функцию случайной величины μ_{ij} и τ_i — момента первого появления i -го результата

$$\varphi(z) = \frac{p_i z_2}{1 - z_2(1 - p_i - p_j + z_2 p_j)};$$

$$\text{б) } M \mu_{ei} \mu_{lj} = \frac{2 p_i p_j}{p_l^2}.$$

IV.1.35. Вывести рекуррентную формулу

$$u_n = p_i(1 - u_{n-1}) + (1 - p_i) u_{n-1}, \quad n \geq 1, \quad u_0 = 1.$$

IV.1.36. Система рекуррентных соотношений для вероятностей u_n и v_n имеет вид:

$$\begin{cases} u_n = (1 - p_i) u_{n-1} + p_i(1 - u_{n-1} - v_{n-1}), \\ v_n = (1 - p_i) v_{n-1} + p_i u_{n-1}, \\ n \geq 1, \end{cases}$$

где

$$u_0 = 1, \quad v_0 = 0.$$

IV.1.37. Обозначим через v_n вероятность того, что комбинация результатов $a_i a_j$ впервые появится в n -м испытании при условии, что результат первого испытания a_i . Получим для вероятностей u_n и v_n систему рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} u_n = (1 - p_i) u_{n-1} + p_i v_{n-1}, \\ v_n = (1 - p_i - p_j) u_{n-1} + p_i v_{n-1}, \\ n \geq 1 \end{cases}$$

с начальными условиями $u_0 = v_0 = u_1 = 0, v_1 = p_j$,

$$u_n(z) = \frac{p_i p_j z^2}{(1 - (1 - p_i)z)(1 - p_j z) - p_i(1 - p_i - p_j)z^2}.$$

IV.1.40. Воспользоваться соотношением

$$P\{\gamma_{1n} \leq r\} = P\{v_{ir} > n\}.$$

IV.1.42. а) воспользовались независимостью v_i случайного вектора $(v_i(n), i = \overline{1, l})$, доказать, что

$$Mz_1^{\alpha_1} \dots z_l^{\alpha_l} = \sum_{n=0}^{\infty} Mz_1^{v_1(n)} \dots z_l^{v_l(n)} P\{v = n\}.$$

IV.1.43. Обозначим через α_i число шаров, которые оказались в i -м ящике. Найдите общую производящую функцию случайных величин $\alpha_i, i = \overline{1, m}$.

IV.1.44. а) Воспользоваться схемой, описанной в задаче IV.1.42, для случая, когда величина v имеет геометрическое распределение с параметром α , а случайные величины ξ_k также распределены по геометрическому закону с параметром p .

IV.1.46. а) Получим для вероятностей $f_n = P\{v = n\}, n = 1, 2, \dots$ рекуррентное соотношение

$$f_{n+2} = (1 - p') (1 - p'') f_n, n = 1, 2, \dots$$

где

$$f_0 = 0, f_1 = p''.$$

б) Воспользоваться схемой, описанной в задаче IV.1.42, в которой v — случайная величина, распределенная по геометрическому закону с параметром p' .

IV.1.47. Воспользоваться рекуррентными соотношениями

$$u_{2k} = (1 - p') u_{2k-1} + p' (1 - u_{2k-1}), k = 1, 2, \dots,$$

$$u_{2k+1} = (1 - p'') u_{2k} - p'' (1 - u_{2k}), k = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$u_0 = 1, u_1 = 1 - p''.$$

IV.1.48. Пусть v_n — вероятность того, что комбинация УН впервые появится в $2n$ -м испытании и первое испытание закончилось успехом.

Получить для вероятностей u_n и v_n систему рекуррентных соотношений

$$\begin{cases} u_n = (1 - p') (1 - p'') u_{n-1} + p' v_{n-1}, \\ v_n = p'' p' v_{n-1}, \\ n \geq 1, \end{cases}$$

где

$$u_1 = v_1 = p'' (1 - p').$$

§ 2

IV.2.2. Доказать сначала, что

$$L(s, z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \psi_n(s),$$

где

$$\psi_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p\{v(t) = n\} dt.$$

Затем, используя соотношение, приведенное в задаче IV.2.1, вывести формулу

$$\psi_n(s) = \frac{1}{s} \psi(s)^n (1 - \psi(s)).$$

VI.2.3. $P\{v(t) = n\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}$, $n = 0, 1, \dots$; $N(t) = \frac{t}{\lambda}$, $t \geq 0$.

IV.2.4. $P\{v(t) \geq n\} = P\{\xi_1 + \dots + \xi_n \leq t\} = u_n(t) = \frac{1}{T n!} \times$
 $\times \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k ((t - ka)_+)^n$, здесь

$$(x - c)_+ = \begin{cases} x - c & \text{для } x \geq c; \\ 0 & \text{для } x < c. \end{cases}$$

IV.2.5. Воспользоваться тем, что распределение Эрланга порядка r с параметром λ совпадает с распределением суммы r независимых случайных величин, распределенных по показательному закону с параметром λ .

$$\text{О т в е т. } P\{v(t) = n\} = \sum_{k=nr}^{nr+r-1} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

VI.2.6. Воспользоваться соотношением, приведенным в задаче IV.2.I.

IV.2.9. Воспользоваться соотношением, приведенным в задаче IV.2.1, чтобы получить соотношение

$$P \left\{ \frac{v(t) - \mu^{-1}t}{b\mu^{-3/2}\sqrt{t}} > x \right\} = P \left\{ \sum_{k=1}^{[b\mu^{-3/2}x\sqrt{t} + \mu^{-1}t] + 1} (\xi_k - \mu) \leq t - \mu ([b\mu^{-3/2}x\sqrt{t} + \mu^{-1}t] + 1) \right\}.$$

IV.2.12. Доказать сначала, что для любой неотрицательной случайной величины τ выполняется соотношение

$$Me^{-s\tau} = \int_0^{\infty} e^{-st} dP \{ \tau < t \} = s \int_0^{\infty} P \{ \tau \leq t \} e^{-st} dt.$$

$$\text{IV.2.25. } Mz^{v(t)} = \frac{1}{z} \left(\frac{zp}{1 - z(1-p)} \right)^{\left[\frac{t}{\tau} \right] + 1},$$

$$Mv(t) = \frac{1}{1-p} \left(\left[\frac{t}{\tau} \right] + 1 \right) - 1.$$

IV.2.27. Для величин ξ_k , $k \geq 1$, по которым строится схема восстановления, ввести вспомогательные величины

$$\xi_k^{\tau} = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi_k < \tau; \\ \tau, & \text{если } \xi_k \geq \tau, \end{cases}$$

где $\tau > 0$ выбрано таким образом, что

$$P \{ \xi_1 < \tau \} = F(\tau) < 1.$$

Используя задачу IV.2.25 покажите, что $Mv_{\tau}(t)^2 < \infty$, где $v_{\tau}(t)$ число восстановлений за время t в схеме восстановления построенной по величинам ξ_k^{τ} , а затем воспользуйтесь задачей IV.2.26.

IV.2.28. Покажите, что в этом случае $v(t)/t \leq \frac{1}{\tau}$ и воспользуйтесь задачей IV.2.6.

IV.2.29. Получите соответствующие оценки для $M(v_{\tau}(t)/t)^2$, где $v_{\tau}(t)$ определено в указании к задаче IV.2.27, а затем воспользуйтесь задачей IV.2.26.

IV.2.30. Примените соответствующий вариант теоремы Лебега.

IV.2.31. Использовать то, что функция

$$g(s) = Me^{is\tilde{\alpha}} = e^{-c|s|\alpha}$$

интегрируема и

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g^n(s) e^{-isu} ds du =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g^n(s) \frac{1 - e^{-ist}}{is} ds.$$

IV.2.32. См. предыдущую задачу.

IV.2.33. Множество $T \subseteq \hat{T} = \{t : \sum_{k=1}^{\infty} P\{\xi_1 + \dots + \xi_k = t\} > 0\}$.

IV.2.34. Воспользуйтесь задачей IV.2.12.

IV.2.35. Для доказательства единственности показать, что разность произвольных двух решений удовлетворяет уравнению

$$v(x) = \int_0^{x+0} v(x-y) F^{n*}(dy), \quad x \geq 0$$

для произвольного $n = 1, 2, \dots$ и воспользоваться тем, что $F^{n*}(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, здесь $F^{n*}(y)$ — n -кратная свертка функции распределения $F(x)$.

IV.2.40. в) Использовать равенство

$$k \left(g_k - \frac{1}{\mu} \right) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{1 - \psi(s)} + \frac{1}{ias} \right) d \cos ks.$$

IV.2.41. а) Доказать, что функция $N(t) = \int_0^t u(s) ds$ удовлетворяет уравнению восстановления с $q(x) = F(x)$, $x \geq 0$, и воспользоваться задачами IV.2.35 и IV.2.36.

в) Пусть $Q = \sup_t \int_t^{\infty} f(t) < \infty$. Показать сначала, что для плотности

$$f_2(t) = \int_0^t f(t-y) f(y) dy$$

имеет место оценка

$$f_2(t) \leq 2R \left(1 - F\left(\frac{1}{2}t\right) \right),$$

и воспользоваться тем, что разность $u(t) - f(t)$ удовлетворяет уравнению восстановления с $q(x) = f_2(x)$, $x \geq 0$.

IV.2.44. $P\{\gamma_t^+ > u\} = e^{-\lambda u}$.

IV.2.45. $P\{\gamma_n^+ \geq k\} = (1-p)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$.

IV.2.46. $P\{\gamma_r^- = k, \gamma_r^+ = l\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda n} \frac{(\lambda n)^{r-k}}{(r-k)!} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{k+l}}{(k+l)!}$ $0 \leq k \leq$

$\leq r < l+r$ (здесь $(\lambda n)^{r-k} = 1$ для $n=0$, $r=k$).

IV.2.47. $M\gamma_t = \frac{2 - e^{-\lambda t}}{\lambda}$.

$$\text{IV.2.49. } P\{\gamma_n^+ = k\} = \sum_{l=r-m-k}^r \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}^l p^l (1-p)^{mn-l} C_m^{k+r-l} \times \\ \times p^{k+r-l} (1-p)^{m-k-r+l}.$$

§ 3

IV.3.1. Доказать сначала, что процесс $v(t)$, $t \geq 0$, является однородным процессом с независимыми приращениями, причем

$$P\{v(t) = n\} = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \dots$$

Для решения задачи воспользоваться независимостью величин $v(t)$, ξ_1 , ξ_2 , ...

IV.3.8. Воспользоваться тем, что в условии задачи характеристическая функция величины ξ_1

$$Me^{iz\xi_1} = 1 + iaz - \frac{1}{2} z^2 \delta^2 + o(z^2)$$

и показать, что

$$Me^{\frac{iz(\xi(t) - \lambda at)}{\sqrt{\delta^2 \lambda t}}} \rightarrow e^{-\frac{z^2}{2}} \quad \text{при } t \rightarrow \infty.$$

IV.3.13. Для вывода этого уравнения воспользоваться тем, что

$$\eta_{t,x} = \begin{cases} ig(x), & \text{если } \tau_1 > t. \\ \tau_1 g(x) + \int_{\tau_1}^t g(x + \xi_1 + (\xi(s) - \xi_1)) ds = \tau_1 g(x) + \\ + \int_0^{t-\tau_1} g(x + \xi_1 + (\xi(s + \tau_1) - \xi_1)) ds, & \text{если } \tau_1 \leq t, \end{cases}$$

а процесс $\xi(s + \tau_1) - \xi_1$, $s \geq 0$, не зависит от ξ_1 и τ_1 и распределен также как $\xi(s)$, $s \geq 0$.

$$\text{IV.3.14. б) } Me^{i(z_1 \xi_1(t) + z_2 \xi_2(t))} = e^{-\lambda t(1 - \varphi_1(z_1)\varphi_2(z_2))},$$

где

$$\varphi_j(z) = Me^{iz\xi_j(t)}, \quad j = 1, 2.$$

$$\text{IV.3.16. } Me^{iz\xi(t)} = \exp \left\{ -(\lambda_1 + \lambda_2) \int_0^t (1 - e^{itx}) d\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times F_1\left(\frac{x}{a_1}\right) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} F_2\left(\frac{x}{a_2}\right)\right) \right\}.$$

$$\text{IV.3.17. а) } Me^{iz\xi(t, A)} = e^{-\lambda t P\{\xi_1 \in A\}(1 - e^{iz})}.$$

$$\text{IV.3.18. а) } P\{\xi(t) = m\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^{2k+m} e^{-\lambda t}}{(2k+m)!} C_{2k+m}^k p^k p^{k+m}.$$

б) для величины $\tau_1(x)$ имеет место представление $\tau(x) = \sum_{k=1}^{\tilde{\tau}(x)} \tau_k$, где величины $\tilde{\tau}(x)$, τ_k , $k \geq 1$, независимы в совокупности;

величина $\tilde{\tau}(x)$ имеет такое же самое распределение, что и время достижения точки x в блужтании Бернулли (см. задачу IV.4.49); величины τ_k , $k \geq 1$, распределены по показательному закону с параметром λ .

IV.3.19. Использовать то, что

$$\sup_{t \geq 0} \bar{\zeta}(t) = \gamma \tau_1 + \sup_{n \geq 1} \sum_{k=1}^n (\gamma \tau_{k+1} + \xi_k).$$

IV.3.21. а) Воспользоваться следующим соотношением:

$$P\{Q(x) > u + x, Q(x+y) - Q(x) \leq y + v\} = \\ = \sum_{n, m=1}^{\infty} P\left\{\sum_{k=1}^{n+1} (\gamma \tau_k - \xi_k) \leq x, \sum_{k=1}^{n-1} (\gamma \tau_k - \xi_k) + \gamma \tau_n > x,\right.$$

$$\tau_1 + \dots + \tau_{n-1} < x + u - \frac{1}{\gamma} \left(x - \sum_{k=1}^{n-1} (\gamma \tau_k - \xi_k) \right),$$

$$\sum_{r=n+1}^{n+m-1} (\gamma \tau_r - \xi_r) \leq y; \sum_{r=n+1}^{n+m} (\gamma \tau_r - \xi_r) + \gamma \tau_{n+m} > y,$$

$$\tau_{n+1} + \dots + \tau_{n+m-1} < y + v - \frac{1}{\gamma} \left(y - \sum_{r=n+1}^{n+m-1} (\gamma \tau_r - \xi_r) \right) \Big\}.$$

где τ_n , $n \geq 1$, и ξ_n , $n \geq 1$ — последовательности случайных величин по которым построен процесс Пуассона $\xi(t)$, $t \geq 0$.

б) Воспользоваться оценкой

$$P\{\theta(x) \leq \varepsilon\} \geq P\{\tau_1 > x\}, \quad x \leq \varepsilon.$$

в) Используя задачи а) и б), показать, что $\varphi(s, x) = M e^{-s\theta(x)}$ при каждом s как функция x непрерывна и удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi(s, x+y) = \varphi(s, x) \varphi(s, y).$$

г) Воспользоваться тем, что процесс $\xi'(t) = \xi(t + \tau_1) - \xi_1$, $t \geq 0$, не зависит от величин τ_1 и ξ_1 и является также обобщенным процессом Пуассона с характеристической функцией как и в процессе $\xi(t)$, $t \geq 0$.

д) Переходя в уравнении г) к преобразованию Лапласа, показать, что

$$M e^{-s\theta(x)} = e^{-\frac{x}{\gamma} s - \frac{x}{\gamma} \Phi(\omega(s))}.$$

з) Воспользоваться тем, что для каждой неотрицательной случайной величины

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{\theta \leq t\} = \lim_{s \rightarrow 0} M e^{-s\theta}.$$

IV.3.22. д) Воспользоваться тем, что с вероятностью 1

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow a \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и } \nu(t) \rightarrow +\infty \text{ при } t \rightarrow \infty.$$

IV.3.24. а) Обозначим $U(t, x) = P\{\xi(t) < x\}$. Ввести для $U(t, x)$ интегральное уравнение

$$U(t, x) = \chi_{(0, \infty)}(x) P\{\tau_1 > t\} + \int_0^{t+0} \int_{-\infty}^{\infty} U(t-s, x-y) dP\{\tau_1 > s, \xi_1 < y\}.$$

IV.3.25. а) Воспользуемся тем, что с вероятностью 1

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k \rightarrow c \text{ при } n \rightarrow \infty \text{ и } \frac{\nu(t)}{t} \rightarrow \frac{1}{a} \text{ при } t \rightarrow \infty$$

(см. задачу IV.3.22, л).

б) Воспользоваться оценкой

$$P\left\{\left|\sum_{k=1}^{\nu(t)} \xi_k - \sum_{k=1}^{[a^{-1}t]} \xi_k\right| > \Delta \sqrt{t}\right\} \leq P\{| \nu(t) - [a^{-1}t] | > \delta t\} + \\ + 2P\left\{\max_{0 < r < \delta t} \left|\sum_{k=1}^r \xi_k\right| > \Delta \sqrt{t}\right\}$$

и неравенством Колмогорова.

в) Воспользоваться задачей б) и показать, что величины $\frac{\xi(t)}{\sqrt{\delta^2 c^{-1} t}}$

и $\sum_{k=1}^{[a^{-1}t]} \frac{\xi_k}{\sqrt{\delta^2 c^{-1} t}}$ имеют одинаковое предельное распределение.

г) Воспользоваться представлением

$$\xi(t) - \frac{c}{a} t = \sum_{k=1}^{\nu(t)} \left(\xi_k - \frac{c}{a} \tau_k \right) - \frac{c}{a} \kappa(t),$$

где $\kappa(t) = t - \sum_{k=1}^{\nu(t)} \tau_k$, и показать, что $t^{-\frac{1}{2}} \kappa(t) \xrightarrow{P} 0$ при $t \rightarrow \infty$ (см. задачу б)).

§ 4

IV.4.1. Подсчитайте число различных траекторий блуждания длины ведущих из точки a в точку y .

IV.4.2. Покажите, что между траекториями блуждания длины n , удовлетворяющих условиям описанным при задании вероятностей стоящих слева и справа можно установить взаимно однозначное соответствие.

IV.4.10. Доказать, что для случайной величины τ_1 имеет место представление

$$\tau_1 \simeq 1 + \begin{cases} 0 & \text{с вероятностью } p \\ \tau_2 & \text{с вероятностью } q \end{cases} \quad (a)$$

где символ $\xi \simeq \eta$ обозначает, что случайные величины ξ и η одинаково распределены.

Воспользоваться потом первым утверждением задачи и вывести из (a) квадратное уравнение для нахождения $f(s) = M s^{\tau_1}$. Для выбора нужного корня воспользуемся тем, что $f(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$.

IV.4.14. Доказать, что вероятность $P_x(0, z)$, $x = 1, 2, \dots, z-1$ удовлетворяет системе линейных уравнений

$$P_x(0, z) = q P_{x-1}(0, z) + p P_{x+1}(0, z); \quad x = \overline{1, z-1}, \\ P_0(0, z) = 1, \quad P_z(0, z) = 0,$$

решение которой существует и единственно.

$$\text{IV.4.16. в) } M \mu_z = \frac{1}{q} \left(\frac{p}{q} \right)^{z-1},$$

$$M \mu_y \mu_z = \frac{\partial^2 \varphi_y(u \varphi_{z-y}(v))}{\partial u \partial v} \Big|_{u, v=1} = \varphi'_y(1) \varphi'_{z-y}(1) + \\ + \varphi''_{z-y}(1) \varphi'_y(1) = \frac{1}{q^2} \left(\frac{p}{q} \right)^{z+y-2} \left(2 \left(1 - \left(\frac{q}{p} \right) y \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{q}{p} \right) y (p - q) \right) \frac{1}{p - q}.$$

IV.4.17. а) Вывести для вероятностей $P_x^{(n)}(0, z)$ рекуррентные соотношения

$$P_x^{(n)}(0, z) = q P_{x-1}^{(n-1)}(0, z) + p P_{x+1}^{(n-1)}(0, z), \quad k = \overline{1, z-1}, \quad n \leq 1,$$

$$P_0^{(n)}(0, z) = \begin{cases} 1 & \text{для } n = 0; \\ 0 & \text{для } n \geq 1 \end{cases}$$

$$P_z^{(n)}(0, z) = 0 \quad \text{для } n \geq 0$$

в) Принимая во внимание соотношения $\lambda_1(s) \lambda_2(s) = \frac{q}{p}$ имеем

$$\varphi_x(s, z) = \left(\frac{q}{p} \right)^z \frac{\lambda_2^{x-z}(s) - \lambda_1^{x-z}(s)}{\lambda_1^z(s) - \lambda_2^z(s)},$$

где

$$\lambda_1(s) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4nas^2}}{2ps}, \quad \lambda_2(s) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqs^2}}{2ps}.$$

IV.4.28. Для решения задач IV.4.27 и IV.4.28 показать, что случайные величины γ_k^+ , $k \geq 0$, γ^+ и η^+ связаны соотношением $\eta^+ = \gamma_{\gamma^+}^+$.

IV.4.31. Пусть A_n — событие, которое состоит в том, что момент n является моментом слабой ступенчатой высоты для блуждания. Доказать, что

$$M\bar{\gamma}^+ = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

и воспользоваться также задачами IV.4.25 и IV.4.30.

IV.4.43. Воспользуемся тем, что вследствие задачи IV.4.42 распределение ступенчатой высоты γ^+ в данном случае показательное, $P\{\gamma^+ < x\} = 1 - e^{-\alpha x}$, и $\psi([0, x])$ — среднее число восстановлений в схеме восстановлений с показательным распределением интервала между восстановлениями (см. задачу IV.2.3) за время x .

IV.4.49. Пусть $y_{zx}^{f(n)} = P\{\tau_x = n < \tau_y/s_0 = z\}$. Доказать сначала, что

$$x f_{00}^{(n)} = 0 f_{xx}^{(n)}.$$

IV.4.51. Воспользоваться задачами IV.4.49 и IV.4.50.

IV.4.53. Ввести произвольные функции для последовательностей $P\{S_n = 0\}$ и $P\{\tau = n\}$ и используя задачу IV.4.52 вывести соотношения между этими производящими функциями.

IV.4.55. Воспользоваться тем, что для целочисленной случайной величины ξ с характеристической функцией $\varphi(z)$.

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-izk} \varphi(z) dz.$$

IV.4.62. Воспользоваться задачами IV.4.61 и IV.4.59. Ответ: $0 < \alpha \leq 1$.

IV.4.64. б) $P\{\eta^+ \geq n\} = (1 - P\{\tau_1 = +\infty\})^n$, $n = 0, 1, \dots$

г) Для нахождения $\varphi(s)$ вывести квадратное уравнение и для выбора нужного корня воспользоваться тем, что $\varphi(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow 0$

§ 5

IV.5.1. Воспользоваться соотношением $p_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in H} p_{ik} p_{kj}^{(n-1)}$,

$n \geq 1$.

$$\text{IV.5.4. Ответ: } p_{11}(z) = \frac{1 - z + z\beta}{(1-z)^2 + z(1-z)(\alpha + \beta)},$$

$$p_{11}^{(n)} = \frac{\beta}{2 - \alpha - \beta} - \left(\frac{\beta}{2 - \alpha - \beta} - 1 \right) (1 - \alpha - \beta)^n,$$

$$p_{21}(z) = \frac{z\beta}{(1-z)^2 + z(1-z)(\alpha + \beta)},$$

$$p_{21}^{(n)} = \frac{\beta}{2 - \alpha - \beta} - \frac{\beta}{2 - \alpha - \beta} (1 - \alpha - \beta)^n.$$

$$\text{IV.5.5. } P\{\eta_0 = i / \eta_n = j\} = \frac{p_{ij}^{(n)} p_i}{\sum_{k \in H} p_{kj}^{(n)} p_k}.$$

$$\text{IV.5.6. } P\{\eta_r = l / \eta_0 = i, \eta_n = j\} = \frac{p_{lj}^{(n-r)} p_{il}^{(r)}}{p_{ij}^{(n)}}.$$

IV.5.9. При $m < n - 1$ величины ξ_m и ξ_n — независимы, при $m = n - 1$ имеем

$$p_{jk}(n-1) = \begin{cases} \begin{cases} 0 & \text{для } k = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{для } k = -1, 0 \end{cases} & \text{если } j = -1; \\ \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{для } k = 0 \\ \frac{1}{4} & \text{для } k = -1, 1 \end{cases} & \text{если } j = 0; \\ \begin{cases} 0 & \text{для } k = -1 \\ 1 & \text{для } k = 0, 1 \end{cases} & \text{если } j = +1. \end{cases}$$

IV.5.10. Вероятность $P\{\eta_n^- = -1\} = 2p(1-p)$ для всех $n = 0, 1, \dots$. Последовательность $\eta_n, n \geq 0$, представляет собой цепь Маркова только тогда, когда $p = 0, \frac{1}{2}, 1$.

IV.5.12. Доказать сначала, что

$$\begin{aligned} P\{\eta_{n+k} = j_k, k = \overline{1, r} / \eta_n = i, \eta_k = i_k, k = \overline{1, n-1}\} &= P\{\eta_{n+r} = \\ &= j_r / \eta_{n+r-1} = j_{r-1}, \dots, \eta_{n+1} = j_1, \eta_n = i, \eta_k = i_k, \\ &k = \overline{1, n-1}\} \times P\{\eta_{n+k} = j_k, k = \overline{1, r-1} / \eta_n = i, \\ &\eta_k = i_k; k = \overline{1, n-1}\}. \end{aligned}$$

IV.5.15. $\alpha = \beta$.

IV.5.17. Доказать сначала, что

$$\begin{aligned} P\{\eta_{\tau+k} = j_k, k = \overline{1, r}, \eta_{\tau} = i, \tau = n, \eta_k = i_k, k = \overline{1, \tau-1}\} &= \\ &= p_{i i_1} \dots p_{i_{r-1} i_r} P\{\eta_{\tau} = i, \tau = n, \eta_k = i_k, k = \overline{1, \tau-1}\}. \end{aligned}$$

Просуммировать эти соотношения по n и вывести соотношение, эквивалентное приведенному в задаче.

IV.5.24. Если состояние i несущественно, то существует такая цепь состояний $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$, что $p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n} > 0$, причем $p_{ji}^{(n)} = 0$ для всех $n = 1, 2, \dots$.

Показать, что

$$1 - f_{ii} \geq p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n}.$$

IV.5.25. Воспользоваться соотношениями, приведенными в задачах IV.5.22. и IV.5.23 и показать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} p_{ij}^{(n)} < \infty$.

IV.5.32. Доказать сначала, что если $p_{ii}^{(k)} > 0$, то $p_{ii}^{(rk)} > 0$ для всех $r = 1, 2, \dots$, а затем показать, что если $p_{ij}^{(n)} > 0$ $p_{ji}^{(m)} > 0$ и $p_{ii}^{(k)} > 0$, то $p_{jj}^{(n+kr+m)} > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots$. Вывести отсюда, что период d_j состояния j является делителем числа k .

IV.5.33. Пусть $\eta_0 = i \in C_r$ и $\eta_k, k \geq 1$ — те номера, для которых $p_{ii}^{(nk)} > 0$. Эти номера имеют по определению периода вид $\eta_k = dl_k, k \geq 1$. Тогда номера $l_k, k \geq 1$, исчерпывают множество номеров l , для которых $p_{ii}^{(l)} > 0$. Проверить это и показать, что наибольший общий делитель чисел $l_k, k \geq 1$, равен 1.

IV.5.38. Если $i \rightarrow j$, то существует цепь состояний $i = i_0, i_1, \dots, i_n = j$ такая, что $i_1, \dots, i_{n-1} \neq i, p_{i_0 i_1} \dots p_{i_{n-1} i_n} > 0$. Доказать, что в том случае, когда $i_1, \dots, i_{n-1} \neq k, kf_{ij} > 0$, а в противном случае $if_{kj} > 0$.

IV.5.39. Доказать, что вероятности $1f_{iN}, i = \overline{1, N}$ удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 1f_{iN} = p_1 f_{i+1N} + q_1 f_{i-1N} & 1 < i < N, \\ 1f_{1N} = 0 & 1f_{NN} = 1, \end{cases}$$

решение которой можно искать в виде

$$1f_{iN} = c_1 \left(\frac{q}{p} \right)^{N-i} + c_2.$$

IV.5.40. Воспользоваться тем, что моменты $\tau_i^{(N)}$ марковские, и показать сначала, что

$$\begin{aligned} P \{ \tau_i^{(N)} = \tau_i^{(N-1)} + n < \tau_j / \tau_i^{(N-1)} < \tau_j \} &= P \{ \eta_k \neq i, j, \\ &k = 1, n-1, \eta_n = i / \eta_0 = i \}, N > 1. \end{aligned}$$

Вывести отсюда рекуррентную формулу

$$P \{ \tau_i^{(N)} < \tau_j / \eta_0 = i \} = {}_j f_{ii} P \{ \tau_i^{(N-1)} < \tau_j / \eta_0 = i \}, N > 1.$$

IV.5.41. а) Проверить, что $P\{\mu_{ik} > n\} = P\{\tau_k^{(n)} < \tau_j\}$.

IV.5.42. Воспользоваться тем, что по определению случайная величина $\tau_j = \sum_{k \neq j} \mu_{jk}$.

IV.5.43. Воспользоваться равенством

$$P\{\tau_j = +\infty/\eta_0 = i\} = P\{\tau_i^{(N)} = \tau_j = +\infty/\eta_0 = i\} + \\ + P\{\tau_i^{(N)} < \tau_j = +\infty/\eta_0 = i\},$$

чтобы получить оценку

$$P\{\tau_j = +\infty/\eta_0 = i\} \leq P\{\tau_i^{(N)} < \tau_j/\eta_0 = i\} = f_{ii}^N.$$

IV.5.45. Достаточно доказать, что из предположения, что состояние обратно, вытекает, что и каждое состояние j возвратно. Для этого нужно получить оценку

$$f_{jj} > (1 - f_j)(1 - f_i).$$

IV.5.52. а), б). В обоих случаях задача сводится к решению системы рекуррентных уравнений вида

$$v_n = a_n + p_n v_{n+1} + q_n v_{n-1} \quad (1)$$

с соответствующими «краевыми» условиями и свободными членами a_n обозначив $u_n = v_n - v_{n-1}$ можно перейти от (1) к соотношению

$$q_n u_n = a_n + p_n u_{n+1}$$

и, используя соответствующие краевые условия, найти сначала явное выражение для неизвестных u_n .

IV.5.54. Воспользоваться тем, что случайные величины $\tau_i^{(n)}$, $n \geq 0$, — марковские моменты времени и использовать такие соотношения:

$$P\{\kappa_i^{(n+1)} > r / \kappa_i^{(n)} = r_n, \dots, \kappa_i^{(0)} = r_0\} = P\{\eta_{\tau_i}^{(n+1)} \neq i, k = \\ = \overline{1, r/\tau_i^{(n+1)}} = r_0 + \dots + r_n, \tau_i^{(n)} = r_1\}$$

$$\text{и } \tau_i^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \kappa_i^{(k)}.$$

IV.5.56. Покажите вначале, что

$$\{v_i(n) \geq r\} = \{\tau_i^{(r)} \leq n\}.$$

IV.5.57. Воспользоваться тем, что $\tau_i^{(n)}$, $n \geq 1$, — марковские моменты времени, и использовать соотношения

$$P\{\kappa_i^{(n+1)} > r, \mu_{ij}^{(n+1)} = l/\kappa_i^{(k)} = r_k, \mu_{ij}^{(k)} = l_k, k = \overline{0, n}\} = \\ = P\{\eta_{\tau_i+m}^{(n+1)} \neq i, m = \overline{1, r}, \sum_{m=1}^r \delta_j^{\eta_{\tau_i+m}^{(n+1)}} = \\ = l/\tau_i^{(n+1)} = r_0 + \dots + r_n, \kappa_i^{(k)} = r_k, \mu_{ij}^{(k)} = l_k, k = \overline{0, n}\}.$$

Показать, что случайные векторы $(\chi_i^{(n)}, \mu_{ij}^{(n)})$, $n \geq 0$ независимы и для $n \geq 1$ одинаково распределены.

IV.5.58. Воспользоваться задачами IV.5.56 и IV.5.57 (как вытекает из задачи IV.5.41, б) для возвратной цепи всегда $M\mu_{ij} < \infty$).

IV.5.59. Воспользоваться оценкой

$$\sum_{k=1}^{v_i(n)} \mu_{ij}^{(k-1)} \leq v_i(n) \leq \sum_{k=1}^{v_i(n)+1} \mu_{ij}^{(k-1)},$$

чтобы показать, что

$$\frac{v_i(n)}{n} \xrightarrow{п. в} M\mu_{ij} \frac{1}{m_{ii}} \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

IV.5.60. в) Воспользоваться задачей IV.5.59.

$$\text{IV.5.66. } q_j = \frac{1 - pq^{-1}}{1 - (pq^{-1})^N} (pq^{-1})^{j-1}, \quad j = \overline{1, N}.$$

IV.5.68. Составить уравнение, которому удовлетворяют стационарные вероятности $q_i = \lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$, $j = 0, 1, \dots$, и для производящих функций

$$Q(z) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j z^j \quad \text{и} \quad Q_k(z) = \sum_{j=0}^{k-1} q_j z^j$$

вывести соотношения

$$Q(z) = (pz + q)^m Q_k(z) \frac{z^k - 1}{z^k + (pz + q)^m}.$$

IV.5.73. Пусть $Q_j = p_1 \dots p_j$. Условие возвратности: $Q_j \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$; условие эргодичности: $\sum_{j=1}^{\infty} Q_j < \infty$, причем стационарные вероятности

$$q_j = Q_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} Q_i \right)^{-1}.$$

IV.5.74. Пусть $\varphi(z) = p_0 z^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^{k-1}$. Условие возвратности;

$\varphi'(1) \leq 0$; эргодичности: $\varphi'(1) < 0$, причем производящая функция стационарного распределения

$$Q(z) = \frac{(1 + \varphi'(1)) \varphi(z) (1 - z)}{\varphi(z) - z}.$$

IV.5.75 в) Доказать сначала, что вероятности $i \rightarrow k f_i = q_k$ не зависят от выбора $i \geq k$. Вывести для вероятностей q_k рекуррентные соотношения

$$(1 - q_k) = (1 - q_1)(1 - q_{k-1}), \quad k > 1,$$

и воспользоваться им для составления уравнения

$$1 - q_1 = q + p(1 - q_1)^2 + r(1 - q_1).$$

Глава V

§ 7

V.1.14. Представить подынтегральные выражения в виде, где множитель при p_k равен z^{-1} .

V.1.15. Проинтегрируйте по распределению $G(z)$ равенство

$$e^{-izt} \varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iz(x-t)} dF(x).$$

V.1.16. Пусть $p_a(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$ — плотность функции распределения случайной величины, распределенной по нормальному закону со средним 0 дисперсией a^2 . Доказать сначала, что имеет место формула

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{izt} \varphi(z) e^{-\frac{1}{2}a^2 z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} p_a(x-t) dF(x). \quad (a)$$

Воспользоваться тем, что правая часть соотношения (a) представляет собой плотность свертки функции распределения $F(x)$ с нормальным распределением с нулевым средним и дисперсией a^2 .

Пусть $F_a(x)$ — соответствующая функция распределения и $f_a(x)$ — ее плотность. Доказать, что $F_a(x) \rightarrow F(x)$ при $a \rightarrow 0$, в точках непрерывности $F(x)$, а затем, что $p(x)$ — непрерывная ограниченная функция и $p_a(x) \rightarrow p(x)$ при $a \rightarrow 0$ для всех $x \in R$, и поэтому для каждого интеграла $[c, d]$ имеем

$$F_a(d) - F_a(c) = \int_c^d p_a(x) dx \rightarrow \int_c^d p(x) dx \text{ при } a \rightarrow 0.$$

V.1.17. Применить формулу обращения для плотностей функции распределения $\Phi_n(\cdot)$, которая представляет собой свертку распределения $F(x)$ и равномерного распределения на промежутке $[0, h]$.

V.1.18. Пусть $F_a(x)$ — функция распределения, представляющая собой свертку распределения $F(x)$ и нормально распределения со средним 0 и дисперсией a^2 . Записать формулу (a), приведенную в задаче 17 для распределения $F_a(x)$, и воспользоваться тем, что $F_a(x) \rightarrow F(x)$ при $a \rightarrow 0$ в точках непрерывности $F(x)$,

V.1.19. Воспользоваться тем, что интеграл справа под знаком предела представляет собой функцию распределения суммы случайной величины с функцией распределения $F(x)$ и независимой от нее нормально распределенной величины $N(0, a^2)$ со средним 0 и дисперсией a^2 .

V.1.22. а) Вычислить характеристическую функцию случайной величины $\xi = \xi_1 - \xi_2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые случайные величины, распределенные показательно с параметром 1 (величина ξ имеет двустороннее нормальное распределение).

V.1.22. б) Воспользоваться формулой обращения для плотностей и задач V.1.22, а).

V.1.23. а) Воспользоваться интегрированием по частям. б) Воспользоваться формулой обращения для плотностей и задач V.1.23, а).

V.1.25. Проверить, что функции $\varphi_1(z) = 1 - |z|$ для $|z| \leq 1$ с периодом 2 и $\varphi_2(z) = 2 \left(\varphi_1\left(\frac{z}{2}\right) - \frac{1}{2} \right)$ являются характеристическими функциями и $\varphi_1^2(z) = \varphi_2^2(z)$.

V.1.29. а) Применить подстановку $y = x(1 - iz)$.

V.1.30. $\varphi(z) = (1 - 2iz)^{-n/2}$. V.1.34. $\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$.

V.1.35. Для построения соответствующего примера можно использовать задачу V.1.22, б).

V.1.39. а) $G(x) = \frac{1}{\mu_2} \int_{-\infty}^x y^2 dF(y)$.

V.1.41. Воспользоваться неравенством

$$\left| e^{itx} \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1!} - \dots - \frac{(itx)^{n-1}}{(n-1)!} \right) \right| \leq \frac{(tx)^n}{n!}.$$

V.1.44. Воспользуемся формулой

$$\frac{1 - u(z)}{z^2} = \int_0^{\infty} \frac{1 - \cos zx}{z^2 x^2} x^2 dF(x),$$

где $u(z) = \operatorname{Re} \varphi(z)$.

Доказать, что когда $u''(0)$ существует, то при $z \downarrow 0$ выражение справа стремится к $u''(0)$ и воспользоваться тем, что подинтегральное выражение при $z \rightarrow 0$ стремится к $\frac{1}{2}$.

V.1.53. Показать, что любую такую функцию можно представить в виде предела линейных комбинаций характеристических функций вида, указанного в задаче.

V.1.54. Воспользоваться задачей V.1.16.

V.1.67. $\varphi(z) = \left(1 - \frac{a}{\lambda} iz + \frac{1}{2} \frac{z^2 \sigma^2}{\lambda} \right)^{-1}$

$$\text{V.1.71. } G(x) = \int_0^x \frac{e^{-hy} dF(y)}{\varphi(h)}, \quad x \geq 0.$$

$$\text{V.1.72. } G(x) = \frac{1}{\mu_n} \int_0^x y^n dF(y), \quad x \geq 0.$$

V.1.76. Записать $q(\bar{z}_k - z_j) \varphi(z_j - \bar{z}_j)$ в виде

$$\int_R q(\bar{z}_k - \bar{z}_j) e^{i(\bar{z}_k, \bar{x})} e^{-i(\bar{z}_j, x)} dF(x_1, \dots, x_n),$$

где $F(\cdot)$ — функция распределения, отвечающая $\varphi(\bar{z})$.

V.1.79. При вычислении интеграла, выражающего характеристическую функцию, перейти к полярным координатам

$$\begin{aligned} \varphi(u, v) = & \frac{\sin u}{u} \frac{\sin v}{v} + \left(\frac{\cos v}{v} - \frac{\sin v}{v^2} \right) \left(-\frac{\cos u}{u} + \frac{3 \sin u}{u^2} + \right. \\ & \left. + \frac{6 \cos u}{u^3} - \frac{6 \sin u}{u^3} \right) - \left(\frac{\cos u}{u} - \frac{\sin u}{u^2} \right) \left(-\frac{\cos v}{v} + \frac{3 \sin v}{v^2} + \right. \\ & \left. + \frac{6 \cos v}{v^3} - \frac{6 \sin v}{v^4} \right). \end{aligned}$$

$$\text{V.1.80. } \psi(z_1, z_2, \dots, z_l) = e^{i \sum_{j=1}^l b_j z_j} \varphi \left(\sum_{j=1}^l a_{j1} z_j, \dots, \sum_{j=1}^l a_{jm} z_j \right).$$

V.1.82. По формуле преобразования плотностей (см. задачу I.3.149) доказать, что для произвольного $\bar{z} = (z_1, \dots, z_m)$ случайная величина $z_1 \xi_1 + \dots + z_m \xi_m$ имеет нормальное распределение и найти ее математическое ожидание и дисперсию. Затем для нахождения $\varphi(z_1, \dots, z_m)$ использовать задачу I.1.81.

V.1.85. а) $r_{12}, r_{34} + r_{13}r_{24} + r_{14}r_{23}$; б) 0;

в) $8r_{12}r_{13}r_{23} + 2(r_{12}^2 + r_{13}^2 + r_{23}^2) + 1$.

§ 2

V.2.4. Показать сначала, что из условия (1) вытекает для произвольного $\varepsilon > 0$ равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{|x| \leq t} x^2 dF(x)}{\int_{|x| \leq \varepsilon t} x^2 dF(x)} = 1.$$

Затем выбрать B_n из соотношения $n \int_{|x| \leq B_n} x^2 dF(x) = B_n^2$, показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \varphi \left(\frac{z}{B_n} \right) \right) = -\frac{z^2}{2};$$

где $\varphi(t)$ — характеристическая функция величины ξ_k .

V.2.5. Найти характеристическую функцию величины $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n}{\sqrt{k_n}}$ и применить теорему непрерывности. Для обоснования предельного перехода показать сначала, что

$$\psi \left(\frac{z}{\sqrt{k_n}} \right) e^{k_n y - \frac{z^2}{2} \sigma^2 y},$$

если $n \rightarrow \infty$ равномерно относительно $y \in [a, b]$ в каждом конечном промежутке $[a, b]$, отдаленного от 0 (здесь $\psi(t)$ — характеристическая функция ξ_k).

V.2.6. а) Воспользуемся оценкой

$$\left| e^{iy} - 1 - iy - \frac{y^2}{2} \right| \leq \frac{|y|^3}{6}.$$

V.2.15. Покажите вначале, что к соответствующему нормальному закону сходятся слабо распределения случайных величин $s_n^{\varepsilon_n}$ — $Hs_n^{\varepsilon_n}$, определенных в задаче V.2.14. Для этого получите для характеристической функции $\varphi_{kn}(s)$ случайной величины $\xi_{kn}^{(\varepsilon_n)}$ — $H\xi_{kn}^{(\varepsilon_n)}$ представление

$$\varphi_{kn}(s) = 1 - \frac{s^2}{2} D \xi_{kn}^{(\varepsilon_n)} + \frac{s^3}{6} \varepsilon_n D \xi_{kn}^{(\varepsilon_n)} \Theta_{kn}(s),$$

где $|\Theta_{kn}(s)| \leq 1$.

Затем воспользуйтесь задачами V.2.14, б) и в).

V.2.18. Доказать сначала, что для всякой последовательности характеристических функций $\varphi_k(z)$, для которой $|\varphi_k(z)|^2 \rightarrow 1$, существует последовательность α_n такая, что $\varphi_n(z) e^{-i\alpha_n r} \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$.

V.2.20. Для доказательства необходимости условия а) нужно использовать соотношения

$$\prod_{j=1}^{kn} P \{ \xi_{nj} \leq \varepsilon \} = P \{ \max_{j=1, \dots, kn} \xi_{nj} \leq \varepsilon \} > P \left\{ \sum_{j=1}^{kn} \xi_{nj} \leq \varepsilon \right\},$$

а для доказательства необходимости условия б) необходимо приложить неравенство Чебышева к случайным величинам

$$\xi'_{nj} = \begin{cases} \xi_{nj}, & \text{если } \xi_{nj} \leq \varepsilon; \\ 0, & \text{если } \xi_{nj} > \varepsilon. \end{cases}$$

V.2.21. Показать сначала, что $|\varphi(r)| < 1$ при $z \neq 0$ и $|\varphi(z)| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow \pm \infty$ и воспользоваться тем, что $|1 - \varphi(z)|^2 \sim bz^2$ при $z \rightarrow 0$.

V.2.22. а) Применяя задачу V.3.21 доказать сначала, что

$$\int_{|z| > \sqrt{n \ln n}} \left| \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) \right|^n dz \leq \sqrt{n} e^{-(u-v)\delta \ln n} \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(z)|^v dz. \quad (1)$$

Использовать также неравенство

$$\left| \varphi\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) \right|^n \leq e^{-\delta z^2} \text{ для } |z| < \sqrt{n \ln n} \quad (2)$$

и центральную предельную теорему.

б) Покажите, что $\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(z)|^2 dr < \infty$ и воспользуйтесь оценками (1) и (2).

V.2.24. Использовать неравенство

$$\begin{aligned} \left| \varphi(t) e^{-iat} - 1 + \frac{z^2}{2} \right| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| e^{izx} - izx + \frac{x^2 z^2}{2} \right| dF(x) \leq \\ &\leq c \int_{-\infty}^{\infty} |z|^{2+\delta} |x|^{2+\delta} dF(x), \end{aligned}$$

т. к. функция $\frac{e^{ix} - 1 - ix + \frac{x^2}{2}}{|x|^{2+\delta}}$ ограничена при $0 < \delta \leq 1$.

V.2.23. Для доказательства использовать оценку

$$|pe^{iz} + q| = \sqrt{1 - 2pq \sin^2 \frac{z}{2}} \leq \exp \left\{ -pq \sin^2 \frac{z}{2} \right\} \leq \exp \{ -\delta pq z^2 \}.$$

где $\delta > 0$ — некоторая константа.

V.2.30. Найти явное выражение для плотности $p_n(x)$ величины $\frac{\xi_1 + \dots + \xi_n}{\sqrt{2n}}$ и использовать это выражение для нахождения асимптотического разложения $p_n(x)$. Для этого использовать то, что $\xi_k = \eta_k + \zeta_k$, где η_k и ζ_k независимы, η_k имеют нормальное распределение, $\zeta_k = \pm 1$ с вероятностями $\frac{1}{2}$.

§ 3

V.3.8. Использовать то, что сумма независимых случайных величин неотрицательна только тогда, когда все слагаемые неотрицательны. Для доказательства неотрицательности величины с характе-

ристической функцией (Γ) использовать то, что для произвольного $\varepsilon > 0$ функция распределения, соответствующая характеристической функции

$$\exp \left\{ \int_{\varepsilon}^{\infty} (e^{ix} - 1) dG(x) \right\},$$

имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{\varepsilon}^k}{k!} e^{-a_{\varepsilon}} \Phi^{*k}(x),$$

где

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq \varepsilon; \\ \frac{G(x) - G(\varepsilon + 0)}{G(t) - G(\varepsilon + 0)} & \text{при } x > \varepsilon, \end{cases}$$

$$a_{\varepsilon} = G(+\infty) - G(\varepsilon + 0), \quad \Phi^{*0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0; \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

V.3.15. Использовать то, что сумма независимых величин имеет арифметическое распределение тогда и только тогда, когда каждое слагаемое имеет арифметическое распределение.

§ 4

V.4.15. в) Показать, что собственные функции уравнения (Γ) удовлетворяют условию

$$q_k(0) = 0, \quad q_k'(T) = 0 \quad \text{и} \quad q_k'(t) = -\lambda_k q_k(t).$$

V.4.21. Пусть матрица B — невырождена ($\det(B) \neq 0$) и \bar{l}_i , $i = \overline{1, k}$, — ортонормированная последовательность собственных векторов матрицы B . Доказать, что $\omega_i'(t) = (\bar{l}_i, \bar{\omega}(t))$, $i = \overline{1, h}$ — независимые между собой одномерные винеровские процессы.

§ 5

V.5.1. Ввести величины

$$\tau_a^{(h)} = \min(kh : \omega(kh) > a, \quad h = 0, 1, \dots)$$

и воспользоваться независимостью событий $\{\tau_a^{(h)} = kh\}$ от событий $\{\omega(kh + t_i) < x_i\}$ $i = \overline{1, l}$ а также тем, что величины $\tau_a^{(h)} \rightarrow \tau_a$ при $h \rightarrow 0$ с вероятностью 1 и $\omega(t)$ — непрерывный с вероятностью 1 процесс, показать, что для произвольного $s \leq +\infty$ $P\{\omega(\tau_a + t_i) < x_i, i = \overline{1, l}, \tau_a < s\} = P\{\omega(t_i) < x_i, i = \overline{1, l}\} P\{\tau_a < s\}$.

V.5.2. Воспользоваться соотношением $\tilde{\omega}(t) = a + \omega(t + \tau_a) - \omega(\tau_a)$ для $t \geq \tau_a$ и задачей V.6.1.

V.5.3. Воспользоваться соотношением

$$P\left\{\sup_{t \leq T} \omega(t) > a, \omega(T) < x\right\} = \int_0^T P\{\omega(T) - \omega(\tau_a) < x - a/\tau_a = s\} ds P\{\tau_a < s\}$$

для того, чтобы используя задачу V.5.1, доказать, что

$$P \left\{ \sup_{t \leq T} \omega(t) > a, \omega(T) < x \right\} = P \left\{ \omega(t) > 2a - x \right\}.$$

V.5.8. Нужно показать, что для любого интервала (α, β)

$$P \left\{ \sup_{\alpha < t < \beta} \omega(t) = a \right\} = 0,$$

и использовать тот факт, что при $\tau'_a < \tau_a$ существует такой интервал (α, β) , где α и β рациональные числа, что $\sup_{\alpha < t < \beta} \omega(t) = a$ (если $\alpha < \tau'_a < \beta < \tau_a$).

V.5.9. Воспользовавшись симметрией процесса $\omega(t)$ показать, что

$$P_{t_1 t_2} = 2 \int_{-\infty}^0 P \{ \tau_{-a} \leq t_2 - t_1 \} dP \{ \omega(t_1) < a \}.$$

Ответ: $P_{t_1 t_2} = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}.$

V.5.10. Воспользоваться задачей V.6.9.

V.5.13. Найти общую плотность величин $\omega^+(T)$ и $\omega(T)$.

V.5.14. Воспользоваться тем, что для $t' < t$

$$x(t) = \max_{t' \leq u < t} \{ \sup (\omega(u) - \omega(t')), x(t') \} - \omega(t) - \omega(t').$$

V.5.16. Поскольку $|\omega(t)|$ и $x(t)$ — марковские процессы, то достаточно проверить, что совпадают функции распределений

$$P \{ x(t) < y/x(t_0) = y_0 \} \text{ и } P \{ |\omega(t)| < y/\omega(t_0) = y_0 \}$$

для $t_0 < t$.

V.5.17. $\frac{\arcsin \sqrt{t_0/t_2}}{\arcsin \sqrt{t_0/t_1}}.$

V.5.18. Найти

$$P \{ \omega(t) \neq 0, 0 < t_0 \leq t \leq t_2/\omega(t) \neq 0, 0 < t_0 \leq t \leq t_2 \}$$

и перейти к пределу при $t_0 \rightarrow 0$.

V.5.20. Доказать сначала, что

$$P \{ \omega(1) \leq x/\omega(u) \geq 0, 0 \leq u \leq 1 \} = P \{ \omega(1) \leq x, \omega(u) \leq \omega(1),$$

$0 \leq u \leq 1 \}$ и воспользоваться задачей V.6.13.

V.5.22. $u(x) = \frac{x-c}{b-c}.$

V.5.24. Для доказательства использовать то, что функция $q_{a,b}(t, x)$ из задачи V.6.23, связана с распределением случайной величины $\zeta_{a-x, b-x}$ соотношением

$$q_{a,b}(t, x) = P \{ \zeta_{a-x, b-x} > t \}.$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I. Случайные события

| | |
|---|----|
| § 1. Операции над множествами, алгебра и σ -алгебра множеств | 3 |
| § 2. Комбинаторика | 9 |
| § 3. Стохастический эксперимент. Пространство элементарных событий | 19 |
| § 4. Классическое определение вероятности | 26 |
| § 5. Геометрические вероятности | 32 |
| § 6. Аксиомы теории вероятностей | 34 |
| § 7. Условные вероятности, независимые случайные события | 41 |

Глава II. Случайные величины

| | |
|--|-----|
| § 1. Дискретные случайные величины | 53 |
| § 2. Общее понятие случайной величины | 65 |
| § 3. Случайные величины и случайные векторы | 70 |
| § 4. Нормальное распределение на плоскости | 103 |
| § 5. Неравенство Чебышева и некоторые другие неравенства | 107 |
| § 6. Условные вероятности и условные математические ожидания | 110 |

Глава III. Последовательности случайных событий и последовательности случайных величин

| | |
|---|-----|
| § 1. Последовательности независимых событий. Лемма Бореля-Кантелли. Закон 0 и 1 | 125 |
| § 2. Последовательности независимых случайных величин | 129 |
| § 3. Понятия сходимости последовательности случайных величин | 136 |
| § 4. Закон больших чисел | 157 |
| § 5. Неравенство Колмогорова и некоторые неравенства, связанные с ним | 165 |
| § 6. Ряды из независимых случайных величин | 168 |
| § 7. Усиленный закон больших чисел | 183 |
| § 8. Мартингалы | 194 |

Глава IV. Простейшие процессы Маркова

| | |
|----------------------------------|-----|
| § 1. Производящие функции | 199 |
| § 2. Схема восстановления | 208 |
| § 3. Обобщенный процесс Пуассона | 220 |
| § 4. Случайные блуждания | 229 |
| § 5. Цепи Маркова | 243 |

Глава V. Предельные теоремы теории вероятностей

| | |
|---|-----|
| § 1. Характеристические функции | 264 |
| § 2. Центральная предельная теорема | 279 |
| § 3. Безгранично делимые и устойчивые распределения | 289 |
| § 4. Винеровский процесс | 297 |
| § 5. Функционалы от винеровского процесса | 303 |

| | |
|---------------------------|-----|
| Решения, указания, ответы | 309 |
|---------------------------|-----|

90 к.

